

Déformations Einstein infinitésimales de cône-variétés hyperboliques

Infinitesimal Einstein deformations of hyperbolic cone-manifolds

Grégoire Montcouquiol

Equipe de Topologie et Dynamique, Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Université Paris-Sud XI

2 février 2008

Abstract

Starting with a compact hyperbolic cone-manifold of dimension $n \geq 3$, we study the deformations of the metric in order to get Einstein cone-manifolds. If the singular locus is a closed codimension 2 submanifold and all cone angles are smaller than 2π , we show that there is no non-trivial infinitesimal Einstein deformations preserving the cone angles. This result can be interpreted as a higher-dimensional case of the celebrated Hodgson and Kerckhoff's theorem on deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds.

If all cone angles are smaller than π , we then give a construction which associates to any variation of the angles a corresponding infinitesimal Einstein deformation. We also show that these deformations are smooth on the singular locus.

Résumé

Partant d'une cône-variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 3$, on étudie les déformations de la métrique dans le but d'obtenir des cônes-variétés Einstein. Dans le cas où le lieu singulier est une sous-variété fermée de codimension 2 et que tous les angles coniques sont plus petits que 2π , on montre qu'il n'existe pas de déformations Einstein infinitésimales non triviales préservant les angles coniques. Ce résultat peut s'interpréter comme une généralisation en dimension supérieure du célèbre théorème de Hodgson et Kerckhoff sur les déformations des cônes-variétés hyperboliques de dimension 3.

Si tous les angles coniques sont inférieurs à π , on donne aussi une construction qui à chaque variation donnée des angles associe une déformation Einstein infinitésimale correspondante. On montre ensuite que ces déformations sont lisses sur le lieu singulier.

L'étude des variétés Einstein, un domaine de recherche actif depuis plusieurs dizaines d'années, est récemment revenue au coeur de l'actualité mathématique, grâce notamment aux travaux de G. Perelman [21] sur la conjecture de géométrisation de Thurston via le flot de Ricci. Les exemples de variétés admettant des métriques Einstein sont plus en plus nombreux, mais restent souvent cantonnés à des familles bien particulières. Ainsi, on connaît de nombreux exemples de variétés Einstein à courbure négative, mais très peu sont non homogènes. Le problème de trouver de telles variétés est rendu plus difficile par le fait qu'elles sont rigides dans le cas compact : on ne peut pas les déformer pour obtenir d'autres variétés Einstein. Ces résultats de rigidité sont connus depuis longtemps pour les variétés hyperboliques et pour les espaces symétriques en général [19]. Mais la situation n'est plus la même dès que l'on quitte les variétés fermées : la rigidité est alors en général subordonnée à d'autres paramètres, comme par exemple la structure conforme du bord à l'infini pour les variétés hyperboliques.

Dans leur célèbre article [13], Hodgson et Kerckhoff montrent que contrairement au cas compact, il est possible de déformer des variétés hyperboliques à singularités coniques. Plus précisément, pour une large classe de cônes-variétés hyperboliques de dimension 3, l'espace des structures coniques hyperboliques au voisinage d'une cône-variété donnée est paramétré par les angles coniques. Si l'on se donne

une petite variation des angles, il existe donc une unique structure de cônes-variétés hyperboliques proche de la structure de départ et réalisant la variation donnée des angles coniques. Leur résultat principal est le théorème de rigidité infinitésimale suivant : si M est une cône-variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini, dont le lieu singulier forme un entrelacs et dont tous les angles coniques sont inférieurs à 2π , alors il est impossible de la déformer sans modifier ses angles. Cet article, complété par des travaux plus récents (voir notamment [14], [16] et [27]), a été le point de départ de nombreux développements dans l'étude de la géométrie des variétés hyperboliques de dimension 3, tels que la géométrisation des petites orbifolds ou l'étude des groupes kleinien ([5], [7]).

Le principe de la démonstration du théorème de rigidité infinitésimale de Hodgson et Kerckhoff est de réussir à appliquer la méthode de Calabi-Weil (cf [8], [12], [26]) aux cônes-variétés : on montre que la représentation d'holonomie n'admet pas de déformations non triviales de la forme voulue. Cela nécessite d'établir des formules d'intégration par parties ainsi qu'un résultat du type théorème de Hodge. Ce genre de difficultés est inhérent à l'étude des cônes-variétés ; on verra dans cet article comment les aborder.

Dans le cas des variétés fermées, Koiso [15] a donné un analogue de la méthode de Calabi-Weil, qui n'utilise plus la représentation d'holonomie mais étudie directement les déformations de la métrique (cf aussi [2], §12.H). Cette deuxième méthode présente l'avantage de s'appliquer, en dimension supérieure, à une classe de variétés plus vaste, et en particulier aux variétés Einstein (vérifiant de bonnes conditions de courbure).

Il est intéressant de regarder si ces techniques s'appliquent aux variétés à singularités coniques, et permettent d'obtenir une généralisation du théorème de Hodgson et Kerckhoff. Il devrait être alors possible de construire, à partir d'une variété hyperbolique à cusps (que l'on peut considérer comme une cône-variété d'angles coniques nuls), des cônes-variétés Einstein proches, dont les angles coniques (suffisamment petits) sont donnés. On peut choisir ces angles de la forme $2\pi/n$; en prenant ensuite un revêtement approprié, on obtient une variété compacte non singulière, dont la métrique a priori non homogène est Einstein, à courbure sectionnelle négative. Comme il a été mentionné, on connaît actuellement très peu d'exemples de telles variétés riemanniennes ; la construction ci-dessus en donnerait toute une famille.

Le but de cet article est d'utiliser ces techniques pour montrer qu'infinitésimalement, la situation en dimension supérieure à 3 est la même qu'en dimension 3. On adapte pour cela la méthode de Koiso, ce qui ne se fait pas sans difficulté. En effet, pour éliminer les déformations géométriquement triviales, il est indispensable de normaliser les déformations infinitésimales (l'analogue dans le cadre des représentations d'holonomie consiste à trouver un représentant harmonique d'une classe de cohomologie donnée). Le problème, dû au caractère singulier de la métrique, est que la solution n'est pas unique et présente en général une perte de régularité. Il est alors nécessaire d'étudier plus en détail l'équation aux dérivées partielles intervenant dans la normalisation et le laplacien associé, qui est un "opérateur d'arête" elliptique selon la terminologie de [17]. On observe que le comportement des solutions de l'équation de normalisation est explicitement contrôlé par la valeur des angles coniques, ce qui permet de donner des bons domaines de résolution quand les angles sont suffisamment petits. On peut alors démontrer que, sous des hypothèses voisines de celles du théorème de Hodgson et Kerckhoff, il est impossible de déformer une cône-variété hyperbolique en des cônes-variétés Einstein sans en modifier les angles coniques. En particulier, on redémontre dans le cas de la dimension trois le théorème de rigidité infinitésimale ci-dessus. On donne aussi une construction qui, à toute variation donnée du p -uplet des angles coniques, associe une déformation Einstein infinitésimale réalisant cette variation au premier ordre.

Ces deux résultats montrent que dans un certain sens, l'espace tangent à une cône-variété hyperbolique parmi les structures de cônes-variétés Einstein est de dimension finie, paramétré par les variations du p -uplet des angles coniques. La question naturelle est alors de savoir s'il est possible d'intégrer les déformations Einstein infinitésimales, ce qui est un problème plus difficile. Il existe cependant des

raisons de penser que la réponse est oui (au moins si les angles coniques sont suffisamment petits), qui viennent du fait que les déformations Einstein infinitésimales modifiant les angles coniques ont un comportement relativement régulier. En particulier, on montre dans la dernière section de cet article que ces déformations sont lisses sur le lieu singulier. Cette situation contraste fortement avec le cas des métriques asymptotiquement hyperboliques, où les déformations sont en général beaucoup moins régulières sur le bord qu'à l'intérieur.

1 Présentation des résultats

Les principaux résultats de cet article sont les deux théorèmes suivants :

Théorème (5.1). *Soit M une cône-variété hyperbolique compacte, dont le lieu singulier forme une sous-variété fermée de codimension 2, et dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Alors toute déformation Einstein infinitésimale ne modifiant pas les angles coniques est triviale.*

Théorème (5.6). *Soit M une cône-variété hyperbolique compacte, dont le lieu singulier forme une sous-variété fermée de codimension 2, et dont les angles coniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont tous strictement inférieurs à π . Soit $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p)$ une variation donnée du p -uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale, unique à déformations triviales près, induisant la variation des angles coniques donnée.*

Les restrictions imposées à la géométrie des cônes-variétés sont essentiellement les mêmes que dans l'article de Hodgson et Kerckhoff [13] (on aurait pu remplacer l'hypothèse “ M compacte” par l'hypothèse “ M de volume fini”, mais les choses sont quand même plus simples dans le cas compact). La condition sur la géométrie du lieu singulier est plus cruciale : c'est elle qui permet d'avoir un bon modèle local pour faire les calculs, car de manière générale, le lieu singulier d'une cône-variété peut être beaucoup plus compliqué. Enfin, la condition sur les angles coniques est une hypothèse technique qui paraît de prime abord assez mystérieuse. En fait, on verra dans la section 4.2.3 que les angles coniques régissent en partie la croissance au voisinage du lieu singulier des solutions d'un laplacien ; plus les angles sont petits, plus on contrôle ces solutions.

L'outil principal dans la démonstration de la rigidité infinitésimale est connu sous le nom de *technique de Bochner*. En partant d'une équation du type $Pu = 0$ où P est un opérateur différentiel du deuxième ordre de type laplacien, on exprime P comme somme d'un opérateur auto-adjoint positif Q^*Q de degré 2 et d'un opérateur R de degré 0 faisant intervenir la courbure. Une telle décomposition

$$P = Q^*Q + R$$

s'appelle une *formule de Weitzenböck* ; on en rencontrera à de nombreuses reprises dans cet article. Ensuite, si elle est valide, une intégration par parties donne

$$0 = \langle Pu, u \rangle = \|Qu\|^2 + \langle Ru, u \rangle.$$

Si l'opérateur R est tel que $\langle Ru, u \rangle \geq c\|u\|^2$ avec $c > 0$, on trouve alors $u = 0$. Le lecteur intéressé par le sujet pourra se référer à [2], §1.I. Et si on se place sur les bons espaces, le fait d'avoir montré par cette technique l'injectivité de l'opérateur P suffit pour obtenir son inversibilité, ce qui permettra de construire les déformations Einstein infinitésimales. Mais avant d'en arriver là, il faut d'abord montrer qu'il existe des formules de Stokes pour les intégrations par partie proposées, et il faut aussi vérifier que les objets que l'on considère rentrent dans le cadre de ces formules.

Dans les premières parties de cet article, on met en place le cadre et les différents outils utilisés par la suite. En particulier, on donne la définition précise des cônes-variétés envisagées ainsi que les restrictions imposés à leur topologie, d'où l'on déduit que les déformations infinitésimales d'une telle

structure peuvent toujours se mettre sous une forme standard (i.e. appartenant à une certaine famille de déformations) au voisinage du lieu singulier. En particulier, une déformation ne modifiant pas les angles coniques a la propriété d'être L^2 , à dérivée covariante L^2 ; c'est entre autres pour cette raison que l'on sera amené ensuite à travailler principalement dans le cadre L^2 . On rappelle aussi la définition des métriques Einstein, des déformations infinitésimales Einstein et des déformations triviales.

La section suivante commence par quelques résultats de la théorie des opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert, qui nous seront utiles pour résoudre les équations aux dérivées partielles apparaissant naturellement dans ce type de problème d'analyse géométrique. On passe ensuite à la théorie de Hodge L^2 et aux différentes formules de Stokes dont on aura besoin pour faire fonctionner des techniques de Bochner. On démontre en particulier le théorème suivant :

Théorème (3.5). *Soient $u \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que $u, \nabla u, v, \nabla^*v$ soient dans L^2 . Alors $\langle u, \nabla^*v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle$.*

Les résultats de cette section 3 seront d'usage constant dans la suite de l'article. Ici encore, on verra qu'il est naturel de travailler avec des objets appartenant à des espaces L^2 . En plus des théorèmes d'intégrations par partie, on donne leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés ainsi que d'autres résultats utilisant les mêmes techniques.

Pour éliminer les déformations triviales, on cherche dans la section 4 à imposer la condition de jauge de Bianchi. Un premier résultat dans ce sens est le suivant :

Théorème (4.1). *Soit M une cône-variété Einstein à courbure de Ricci négative. On a la décomposition en somme directe*

$$L^2(S^2M) = \ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$$

Ce résultat signifie que toute déformation infinitésimale L^2 peut être normalisée selon la jauge de Bianchi, ce qui justifie a posteriori son choix. Cependant pour pouvoir adapter la méthode de Koiso on a besoin de résultats plus forts, garantissant une certaine régularité à la déformation normalisée. On est alors amené à étudier de plus près l'équation de normalisation et l'opérateur correspondant

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id = \Delta + 2(n-1)Id$$

agissant sur les 1-formes. Il est facile de trouver des solutions dans l'espace de Sobolev $L^{1,2}$, et le but est de comprendre le comportement de ces solutions. Pour ce faire, et après avoir préalablement exhibé une décomposition adaptée en séries de Fourier généralisées (§4.2.2), on étudie les solutions de l'équation homogène au voisinage de la singularité. On montre que leur comportement est étroitement lié aux angles coniques; par exemple, la norme ponctuelle d'une solution donnée au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier d'angle conique α est en r^k avec $k \in \{\pm 1 \pm 2p\pi\alpha^{-1}, \pm 2p\pi\alpha^{-1} \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Les restrictions imposées sur les angles coniques permettent de contrôler suffisamment les solutions de l'équation homogène, et finalement les solutions de l'équation de normalisation tout court; et plus on restreint les angles, plus on contrôle les solutions. On aboutit ainsi aux théorème suivant :

Théorème (4.8). *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Soit ϕ une forme lisse appartenant à $L^2(T^*M)$. Alors il existe une unique forme $\eta \in C^\infty(T^*M)$ solution de l'équation $L\eta = \phi$ telle que $\eta, \nabla\eta, d\delta\eta$, et $\nabla d\eta$ soient dans L^2 .*

Théorème (4.9). *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π . Alors l'opérateur*

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id : L^{2,2}(T^*M) \rightarrow L^2(T^*M)$$

est un isomorphisme.

Une fois ces résultats établis, il est relativement facile de faire fonctionner la méthode de Koiso pour démontrer les théorèmes 5.1 et 5.6; c'est l'objet de la section 5. Pour la rigidité infinitésimale, le principe est le suivant. Partant d'une déformation infinitésimale Einstein h_0 préservant les angles

(donc à dérivée covariante L^2) d'une cône-variété hyperbolique, dont tous les angles coniques sont inférieurs à 2π , la démonstration de sa trivialité se fait en deux temps. On a d'abord besoin de se débarrasser des déformations triviales, on utilise donc le résultat 4.8 mentionné ci-dessus pour résoudre l'équation de normalisation. On applique ensuite une technique de Bochner à la déformation normalisée $h = h_0 - \delta^* \eta$. En utilisant la formule de Weitzenböck idoine et le premier résultat d'intégration par parties, on obtient

$$\delta^\nabla d^\nabla h + (n - 2)h = 0.$$

Une deuxième intégration par parties, un peu plus compliquée, permet de conclure que $h_0 = \delta^* \eta$, et donc que l'on a bien rigidité infinitésimale relativement aux angles coniques au sein des cônes-variétés Einstein.

Pour le théorème 5.6, la méthode de construction est la suivante : on part d'une déformation infinitésimale h_0 , Einstein au voisinage du lieu singulier, et induisant la variation voulue des angles. On cherche alors à lui rajouter une déformation $L^{1,2}$ (donc ne modifiant pas les angles) de telle sorte que la somme vérifie l'équation d'Einstein linéarisée. Cela revient à résoudre une équation de la forme

$$(\nabla^* \nabla - 2\mathring{R})h = \phi,$$

où $\phi = E'(h_0)$ est un 2-tenseur vérifiant la condition de jauge de Bianchi, et à s'assurer que la solution trouvée vérifie aussi cette condition, ce qui se fait assez aisément à partir des théorèmes 4.1 et 4.9. La déformation $h - h_0$ est alors Einstein et a les propriétés voulues.

La dernière section de cet article est consacré aux déformations Einstein infinitésimales données par le théorème 5.6, et en particulier à la régularité des déformations induites de la métrique du lieu singulier. Il est pour cela nécessaire d'étudier en détails l'opérateur $\nabla^* \nabla - 2\mathring{R}$ agissant sur les 2-tenseurs symétriques. La méthode est en grande partie la même que pour l'étude de l'opérateur $\nabla^* \nabla + (n - 1)Id$, réalisée dans la section 4.2. Ici encore, le comportement des solutions de l'équation homogène est directement lié à la valeur des angles coniques. On aboutit alors au théorème suivant, conclusion de cet article :

Théorème (6.3). *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont strictement inférieurs à π . Soit $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p)$ une variation donnée du p -uplet des angles coniques, et soit $h_{\dot{\alpha}}$ la déformation Einstein infinitésimale normalisée correspondante. Alors la déformation infinitésimale h_Σ de la métrique du lieu singulier, induite par $h_{\dot{\alpha}}$, est C^∞ .*

2 Préliminaires

2.1 Cônes-variétés

On va maintenant préciser le cadre dans lequel on se place. La notion de cône-variété, plus générale que celle d'orbifold, a été introduite par Thurston [23] pour l'étude des déformations des variétés hyperboliques à cusps en dimension 3. Le cas le plus fréquemment rencontré est celui des cônes-variétés à courbure constante. Celles-ci sont relativement simples à définir, soit géométriquement comme un recollement (local) de simplexes géodésiques, soit en explicitant la métrique en coordonnées ; c'est cette dernière approche qui sera utilisée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [24] pour une définition par récurrence des cônes-variétés modelées sur une géométrie.

La géométrie du lieu singulier d'une cône-variété arbitraire peut être très compliquée. Dans le cadre de notre étude on se limitera au cas où il forme une sous-variété de codimension deux, ce qui permet de parler d'angle conique le long de chaque composante connexe du lieu singulier et d'avoir des bons modèles locaux pour mener à bien les calculs.

Enfin, comme notre but est de s'intéresser à des variétés Einstein, on s'autorise une classe assez large de métriques à singularités : on demande juste que la métrique conique ressemble asymptotiquement au produit de la métrique du lieu singulier avec la métrique d'un cône (de dimension deux).

Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$, et $\Sigma = \coprod_{i=1}^p \Sigma_i$ une sous-variété fermée plongée de codimension 2, dont les Σ_i sont les composantes connexes. Dans la suite de ce texte on emploiera souvent la notation M pour désigner improprement $M \setminus \Sigma$.

Définition 2.1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels positifs. La variété M est munie d'une structure de cône-variété, de lieu singulier $\Sigma = \coprod_{i=1}^p \Sigma_i$ et d'angles coniques les α_i , si :

- $M \setminus \Sigma$ est munie d'une métrique riemannienne g , non complète ;
- pour tout i , Σ_i est munie d'une métrique riemannienne g_i ;
- pour tout i , tout point x de Σ_i a un voisinage V dans M difféomorphe à $D^2 \times U$, avec $U = V \cap \Sigma_i$ un voisinage de x dans Σ_i , dans lequel g s'exprime en coordonnées cylindriques locales sous la forme

$$g = dr^2 + \left(\frac{\alpha_i}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où q est un 2-tenseur symétrique vérifiant $g(q, q) = o(r^2)$ et $g(\nabla q, \nabla q) = o(1)$.

Dans la suite on exprimera souvent la métrique g sous la forme légèrement différente

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où la coordonnée d'angle θ est définie non plus modulo 2π mais modulo l'angle conique α_i .

Une cône-variété hyperbolique est alors une cône-variété telle que les métriques g et g_i sont hyperboliques. On a dans ce cas, en reprenant les notations de la définition,

$$q = \left(\frac{\alpha_i}{2\pi}\right)^2 (\text{sh}(r)^2 - r^2) d\theta^2 + (\text{ch}(r)^2 - 1) g_i.$$

Pour démontrer un certain nombre de résultats, on aura besoin d'un contrôle sur les angles coniques ; par exemple, la preuve de la rigidité infinitésimale à partir de la fin de la section 4.2 nécessite que tous les angles soient inférieurs à 2π . Ces conditions seront explicitées quand elles apparaîtront.

Le caractère singulier des cônes-variétés pose problème pour adapter certaines méthodes d'analyse, comme une technique de Bochner. Il faut toujours vérifier si les choses marchent de la même manière que dans le cas compact.

La première difficulté va venir des intégrations par parties. Premièrement, pour garantir que les expressions manipulées ont un sens, on sera obligé de travailler avec des objets L^2 . Deuxièmement, il va falloir démontrer qu'on peut effectivement appliquer des formules de type Stokes : ce sera l'objet de la partie 3. Au final on sera en mesure d'effectuer des intégrations par parties pour les opérateurs d et δ , et ∇ et ∇^* . Mais un tel résultat n'existe pas (à la connaissance de l'auteur) pour les opérateurs d^∇ et δ^∇ ; on devra donc contourner cette difficulté quand on en aura besoin (section 5.1).

La plus grande difficulté va venir de l'équation correspondant à l'opérateur d'Einstein linéarisé et de l'équation de normalisation, étudiées dans les sections 4.2 et 6.1. Bien qu'en présence de sympathiques opérateurs elliptiques de la forme $\nabla^* \nabla$ plus un terme borné d'ordre 0, on ne peut pas appliquer la théorie classique sur une cône-variété, dont la métrique est singulière. Les équations admettront encore des solutions, mais celles-ci ne seront plus uniques, et on aura des problèmes de perte de régularité. Cependant, en imposant que les angles coniques soient assez petits, on arrivera à avoir suffisamment de contrôle sur les solutions et la norme de certaines combinaisons linéaires de leurs dérivées pour faire fonctionner les démonstrations.

2.2 Déformations des cônes-variétés

Soit (M, g) une cône-variété au sens ci-dessus, de lieu singulier Σ . Soit maintenant g_t une famille de métriques singulières, dérivable, telle que $g_0 = g$ et que pour tout t , (M, g_t) soit une cône-variété de lieu singulier Σ .

Si x est un point de Σ , pour tout t il existe par définition un voisinage de x dans M dans lequel on a l'expression ci-dessus pour la métrique en coordonnées cylindriques. Quitte à les restreindre, ces voisinages sont tous difféomorphes, et on peut donc faire agir une famille ϕ_t de difféomorphismes de telles façons que les coordonnées cylindriques locales pour l'expression de $\phi_t^* g_t$ soient les mêmes pour tout t .

Dit d'une autre manière, il existe un voisinage V de x dans M , difféomorphe à $D^2 \times U$ où $U = V \cap \Sigma$ est un voisinage de x dans Σ , dans lequel on peut trouver des coordonnées cylindriques telles que pour tout t , on ait :

$$\phi_t^* g_t = dr^2 + \left(\frac{\alpha_t}{2\pi}\right)^2 r^2 d\theta^2 + h_t + q_t.$$

Dans cette expression, h_t désigne une métrique sur U et q_t est un 2-tenseur symétrique qui vérifie les conditions de la définition 2.1.

Finalement, quitte à modifier la famille g_t par des difféomorphismes, ce qui revient à modifier la déformation infinitésimale par une déformation géométriquement triviale, on peut montrer que $h = \frac{dg_t}{dt}|_{t=0}$ est au voisinage du lieu singulier combinaison linéaire des quatre types de déformations suivants, modifiant :

- l'angle,
- la métrique du lieu singulier,
- le reste,
- et enfin, la façon de "recoller" la variable d'angle quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Au voisinage du lieu singulier, une déformation h modifiant le reste vérifie $|h| = o(r)$ et $|\nabla h| = o(1)$. Les autres déformations sont de la forme (à une déformation modifiant le reste près) $\lambda r^2 d\theta^2$ pour celle modifiant l'angle, h_Σ , extension d'un 2-tenseur symétrique défini sur Σ pour celle modifiant la métrique du lieu singulier, et $r^2 d\theta \cdot \omega$, où ω est l'extension d'une 1-forme définie sur Σ , pour celle modifiant la variable d'angle.

Il est important de noter que toutes ces déformations infinitésimales sont L^2 . Par contre seules les trois dernières ont leur dérivée covariante dans L^2 . En effet, on peut constater que sur les expressions donnée ci-dessus, $|\nabla h|$ est en $o(1)$, $|\nabla h_\Sigma|$ et $|\nabla r^2 d\theta \cdot \omega|$ sont en $O(1)$, alors que $|\nabla r^2 d\theta^2|$ est en r^{-1} , et n'est donc pas L^2 . Ainsi, c'est au niveau du caractère L^2 ou non de la dérivée covariante de la déformation que l'on voit si celle-ci préserve ou non les angles coniques.

2.3 Déformations Einstein infinitésimale et équation de normalisation

Par définition, une *métrique Einstein* est une métrique riemannienne g vérifiant l'équation

$$\text{ric}(g) = cg,$$

où le terme de gauche est le tenseur de courbure de Ricci et où c est une constante. Notons que si on remplace g par λg , avec λ une constante strictement positive, alors la nouvelle métrique vérifie l'équation ci-dessus en remplaçant c par $\lambda^{-1}c$; donc en fait c'est principalement le signe et non la valeur exacte de la constante c qui compte. On peut ainsi distinguer trois grandes classes de métriques Einstein suivant que c est négatif, positif ou nul.

Les métriques à courbure sectionnelle constante sont toujours Einstein ; en dimension 3 ce sont les seules. Par contre dès la dimension 4 il y a beaucoup plus de métriques Einstein que de métriques à courbure sectionnelle constante ; on peut donc considérer la condition Einstein comme un affaiblissement ou une généralisation de la condition de courbure sectionnelle constante.

Puisque l'on s'intéresse principalement aux cônes-variétés hyperboliques, on ne considèrera que des métriques Einstein vérifiant $E(g) = 0$, avec

$$E(g) = \text{ric}(g) + (n-1)g.$$

La constante $(n-1)$ est choisie de telle sorte que les métriques hyperboliques vérifient cette équation.

Soit g_t une famille lisse de métriques Einstein (c'est-à-dire vérifiant $E(g_t) = 0$) sur une variété donnée M , avec $g_0 = g$. Le 2-tenseur symétrique $h = \frac{d}{dt}g_t|_{t=0}$ vérifie alors l'équation d'Einstein linéarisée

$$E'_g(h) = 0.$$

Le calcul de E'_g est classique, voir par exemple [2] §1.K :

$$E'_g(h) = \nabla_g^* \nabla_g h - 2\mathring{R}_g h - \delta_g^*(2\delta_g h + \text{dtr}_g h). \quad (1)$$

Les opérateurs utilisés ici nécessitent un peu d'explication. La notation ∇_g , ou ∇ pour simplifier, désigne la dérivée covariante ou connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne g . Elle admet un adjoint formel noté ∇_g^* : si $(e_i)_{i=1\dots n}$ est une base orthonormée, on a

$$\nabla_g^* \eta(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \eta)(e_i, X_1, \dots, X_p).$$

Pour les tenseurs symétriques, on définit $\delta_g^* : \mathcal{S}^p M \rightarrow \mathcal{S}^{p+1} M$ comme étant la composée de la dérivée covariante et de la symétrisation. En particulier, si $\eta \in \Omega^1 M = \mathcal{S}^1 M$, alors

$$\begin{aligned} \delta_g^* \eta(x, y) &= \frac{1}{2} ((\nabla_x \eta)(y) + (\nabla_y \eta)(x)) \\ &= \frac{1}{2} (g(\nabla_x \eta^\sharp, y) + g(\nabla_y \eta^\sharp, x)) \\ &= \frac{1}{2} L_{\eta^\sharp} g(x, y), \end{aligned}$$

où L_{η^\sharp} désigne la dérivée de Lie le long du champ de vecteur η^\sharp dual (pour la métrique g) à la forme η . L'adjoint formel de l'opérateur δ_g^* se note δ_g ; c'est juste la restriction de ∇_g^* à $\mathcal{S}^{p+1} M$.

Ensuite, \mathring{R}_g désigne l'action du tenseur de courbure R_g sur les 2-tenseurs symétriques : si h est une section de $\mathcal{S}^2 M$, on pose

$$\mathring{R}_g h(x, y) = \sum_{i=1}^n h(R_g(x, e_i)y, e_i),$$

où (e_i) est une base orthonormale pour TM ; c'est encore un 2-tenseur symétrique. Si g est hyperbolique, on a alors

$$\mathring{R}_g h = h - (\text{tr}_g h)g. \quad (2)$$

L'opérateur \mathring{R}_g apparaît souvent dans les problèmes de déformations de métriques ; la propriété suivante ([2], §1.132) met l'accent sur son lien avec les métriques Einstein.

Proposition 2.2. *Une métrique riemannienne g est Einstein si et seulement si l'opérateur \mathring{R}_g envoie l'espace \mathcal{S}_0^2 des 2-tenseurs symétriques sans trace dans lui-même.*

Enfin, la notation tr_g désigne juste la trace par rapport à g : si h est un 2-tenseur,

$$\text{tr}_g h = \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i).$$

Dans la suite et pour alléger les notations, on omettra le plus fréquemment l'indice g .

Par définition, une *déformation Einstein infinitésimale* de la variété Einstein (M, g) est un 2-tenseur symétrique h vérifiant l'équation $E'_g(h) = 0$.

Maintenant, si g est Einstein et si ϕ est un difféomorphisme de M , alors la métrique tirée en arrière ϕ^*g est aussi Einstein. Par conséquent, si ϕ_t est une famille lisse de difféomorphismes telle que ϕ_0 soit l'identité, alors la déformation infinitésimale associée $\frac{d}{dt}\phi_t^*g|_{t=0}$ est naturellement Einstein. Une telle déformation est qualifiée de *triviale*. Soit X le champ de vecteurs sur M défini par $X(x) = \frac{d}{dt}(\phi_t(x))|_{t=0}$, et soit $\eta = X^\flat$ la 1-forme duale, c'est-à-dire vérifiant $\eta(Y) = g(X, Y)$ pour tout vecteur Y . On a les relations

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^*g)|_{t=0} = L_X g = 2\delta_g^* \eta;$$

l'espace des déformations infinitésimales triviales est donc égal à $\text{Im } \delta_g^*$.

La façon habituelle de se débarrasser des déformations triviales est d'imposer une condition de jauge, c'est-à-dire de ne considérer que des déformations infinitésimales vérifiant une certaine équation. On en trouve plusieurs dans la littérature, on utilisera ici la jauge de Bianchi (voir [4] §I.1.C, [1] §2.3). On veut donc que nos déformations infinitésimales h vérifient

$$\beta_g(h) = 0,$$

où $\beta_g : \mathcal{S}^2 M \rightarrow \Omega^1 M$ est l'opérateur de Bianchi (associé à la métrique g) défini par

$$\beta_g(h) = \delta_g h + \frac{1}{2} d \text{tr}_g h.$$

D'un point de vue géométrique, d'autres conditions de normalisation sont plus naturelle ; par exemple la condition $\delta_g h = 0$, qui correspond à regarder des déformations L^2 -orthogonales aux déformations triviales, ou la condition d'être infinitésimalement harmonique, voir [2] §12.C, cf aussi [14]. Mais en général ces conditions coïncident sur les déformations infinitésimales Einstein. La condition de jauge de Bianchi est plus naturelle d'un point de vue analytique, pour rendre les opérateurs elliptiques ; cf par exemple [10].

Ainsi, étant donnée une déformation infinitésimale h_0 , on veut pouvoir la modifier par une déformation triviale, de façon essentiellement unique, de telle sorte que le résultat vérifie la condition de jauge. Dit plus précisément, on veut trouver une 1-forme η telle que la déformation normalisée $h = h_0 - \delta^* \eta$ satisfasse $\beta(h) = 0$; de façon équivalente, on cherche à résoudre l'équation de normalisation (on omet les indices)

$$\beta \circ \delta^* \eta = \beta(h_0). \quad (3)$$

L'étude de cette équation et de l'opérateur $\beta \circ \delta^*$ est l'objet de la section 4.2.

On se placera entre autre dans le cadre de la théorie des opérateurs non bornés entre espace de Hilbert, dont les résultats principaux sont cités dans la section suivante.

3 Analyse L^2 sur les cônes-variétés

3.1 Quelques rappels sur les opérateurs non bornés

On va maintenant annoncer un certain nombre de définitions et propriétés concernant les opérateurs non bornés ; le lecteur intéressé pourra consulter [20], chapitre 8, ou [22], chapitre 13.

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Un *opérateur non borné* est une application linéaire

$$A : D(A) \rightarrow F$$

où $D(A)$ (le domaine de A) est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, toute application linéaire (continue ou non) de E dans F est un opérateur non borné.

Soit A et B deux opérateurs non bornés. On dit que B est un *prolongement* de A , noté $A \subset B$, si $D(A) \subset D(B)$ et $B|_{D(A)} = A$.

Un opérateur non borné A est *fermé* si son graphe $G(A) = \{(u, A(u)) | u \in D(A)\}$ est fermé dans $E \times F$, ce qui revient à dire que pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que $u_n \rightarrow u \in E$ et $A(u_n) \rightarrow v \in F$, on a $u \in D(A)$ et $v = A(u)$.

Si A est à domaine dense dans E , on peut définir son *adjoint* $A^* : D(A^*) \subset F \rightarrow E$ de la façon suivante :

$$v \in D(A^*) \iff \exists w \in E \text{ tel que } \forall u \in D(A), \langle u, w \rangle_E = \langle A(u), v \rangle_F.$$

Comme $D(A)$ est dense dans E , l'élément w (si il existe) est unique ; on pose $w = A^*(v)$. Remarquons que l'adjoint d'un opérateur est toujours fermé. On a aussi la propriété évidente (si les opérateurs considérés sont à domaine dense) $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.

Pour définir A^{**} , il faut vérifier que A^* est à domaine dense, ce qui n'est pas toujours le cas. Mais on a la propriété suivante (voir [20] §117) :

Proposition 3.1. *Soit A un opérateur non borné de E dans F , à domaine dense. Alors A^* est à domaine dense si et seulement si A admet un prolongement fermé. Dans ce cas, A^{**} est le plus petit prolongement fermé de A , i.e. si on a $A \subset B$ avec B fermé, alors $A^{**} \subset B$.*

On remarque aussi que le graphe de A^{**} n'est autre que l'adhérence dans $E \times F$ du graphe de A . D'autre part, si A est fermé, on a $A^{**} = A$. En particulier, dès que cela a un sens, on a toujours $A^{***} = A^*$ (notons au passage que l'on a bien $(A^*)^{**} = (A^{**})^*$).

Si A est injectif, on peut définir son inverse $A^{-1} : \text{son domaine} \rightarrow E$: son domaine n'est autre que l'image de A .

Pour pouvoir définir la composition de deux opérateurs non bornés $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ et $B : D(B) \subset F \rightarrow G$, on pose, par définition,

$$D(B \circ A) = \{x \in D(A) | A(x) \in D(B)\}.$$

De même, la somme se définit naturellement sur le domaine

$$D(A + A') = D(A) \cap D(A').$$

Il se peut évidemment que ces domaines soient réduits à l'élément nul. Cependant, on a le théorème relativement surprenant suivant ([20], §118, ou [22], théorème 13.13), et son corollaire :

Théorème 3.2. *Si l'opérateur non borné $A : E \rightarrow F$ est fermé et de domaine dense, alors les opérateurs*

$$B = (A^* \circ A + Id)^{-1}, \quad C = A \circ (A^* \circ A + Id)^{-1}$$

sont des applications linéaires continues de E dans E et de E dans F ; de plus $\|B\| \leq 1$, $\|C\| \leq 1$, et B est auto-adjointe positive.

Corollaire 3.3. *Si l'opérateur non borné $A : E \rightarrow F$ est fermé et de domaine dense, et si $B : E \rightarrow E$ est une application linéaire continue et auto-adjointe, alors l'opérateur $A^* \circ A + B$ est auto-adjoint.*

Maintenant, soit M une variété riemannienne, et soient E et F deux fibrés vectoriels sur M , munis de métriques riemanniennes $(\cdot, \cdot)_E$ et $(\cdot, \cdot)_F$. On note $C_0^\infty(E)$ (resp. $C^\infty(E)$, resp. $L^2(E)$) l'espace des sections de E qui sont C^∞ à support compact (resp. C^∞ , resp. L^2); de même pour F . La métrique sur E et la forme volume sur M font de $L^2(E)$ un espace de Hilbert (pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_E = \int_M (f, g)_E d\text{vol}_M$) dont $C_0^\infty(E)$ est un sous-espace dense; de même pour F .

Soit A un opérateur différentiel agissant sur les sections de E . On le considère comme un opérateur non borné de domaine les sections C^∞ à support compact, i.e.

$$A : C_0^\infty(E) \rightarrow C_0^\infty(F) \subset L^2(F),$$

et on suppose que A admet un *adjoint formel* $A^t : C_0^\infty(F) \rightarrow C_0^\infty(E)$, i.e. tel que

$$\langle Au, v \rangle_F = \langle u, A^t v \rangle_E \quad \forall u \in C_0^\infty(E) \text{ et } \forall v \in C_0^\infty(F).$$

On a clairement $A^t \subset A^*$ donc A^* est à domaine dense.

On pose alors $A_{\min} = A^{**}$, c'est, on l'a vu, le plus petit prolongement fermé de A . Le graphe de A^{**} est l'adhérence du graphe de A , donc (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{\min}) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in C_0^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2,$$

$A_{\min}u$ est alors la valeur de cette limite.

On pose aussi $A_{\max} = (A^t)^*$; comme $A^t \subset A^*$, on a $A^{**} \subset A_{\max}$ et donc $A \subset A_{\max}$. De plus $A^t \subset (A^t)^{**} = (A_{\max})^*$, et, vu la propriété de minimalité de ** , on en déduit que A_{\max} est le plus grand prolongement de A dont l'adjoint prolonge aussi A^t . Plus précisément,

$$u \in D(A_{\max}) \iff \exists v \in L^2(F) \text{ tel que } \forall \phi \in C_0^\infty(F), \quad \langle u, A^t \phi \rangle_E = \langle v, \phi \rangle_F,$$

ce qui signifie exactement que $v = Au$ "au sens des distributions". En utilisant des techniques standards d'analyse (convolution), on montre qu'on peut approcher $u \in D(A_{\max})$ par des sections lisses, i.e. (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{\max}) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in C^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2$$

($A_{\max}u$ est alors la valeur de cette limite).

3.2 Formules de Stokes

Pour faire fonctionner la technique de Bochner on a besoin de procéder à des intégrations par parties. Les deux résultats suivants ainsi que leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés sont à notre disposition. Le premier théorème d'intégration par parties sur une cône-variété est le suivant, dû à Cheeger [9] :

Théorème 3.4. *Soient $\eta \in \Omega^p M$ et $\sigma \in \Omega^{p+1} M$ deux formes C^∞ sur M telles que η , $d\eta$, σ , et $\delta\sigma$ soient dans L^2 . Alors*

$$\langle \eta, \delta\sigma \rangle = \langle d\eta, \sigma \rangle.$$

En fait il faut adapter un tout petit peu la démonstration, ou combiner deux résultats de l'article cité (cf aussi [13], appendice).

Le deuxième résultat concerne les tenseurs et non plus les formes différentielles :

Théorème 3.5. Soient $u \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que $u, \nabla u, v, \nabla^* v$ soient dans L^2 . Alors

$$\langle u, \nabla^* v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle.$$

Démonstration. On va démontrer ce résultat en utilisant une méthode similaire à celle de Cheeger [9]. Pour simplifier, on supposera que la métrique au voisinage de Σ est exactement, en coordonnées locales, de la forme $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_{|\Sigma_t}$, où θ est définie modulo l'angle conique α . Le cas général se traite exactement de la même façon, les expressions sont juste un peu plus compliquées.

Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a -voisinage fermé de Σ dans M soit tubulaire. Pour $t \leq a$, on note U_t le t -voisinage de Σ dans M , $\Sigma_t = \partial U_t$, et $M_t = M \setminus U_t$. Le vecteur $\frac{\partial}{\partial r} = e_r$ est une normale unitaire en tout point de Σ_t . Avec ces notations, une intégration par parties (c'est-à-dire la formule de Stokes) nous donne :

$$\int_{M_t} (g(u, \nabla^* v) - g(\nabla u, v)) = \int_{\Sigma_t} g_{|\Sigma_t}(u, i_{e_r} v) \quad (4)$$

où $i_{e_r} v = v(e_r, \cdot)$. Le terme de gauche converge vers $\langle u, \nabla^* v \rangle - \langle \nabla u, v \rangle$ quand t tend vers 0. Notons I_t le terme de droite de l'égalité, qui correspond au terme de bord. On a alors les inégalités suivantes (la notation $|\cdot|$ désigne la valeur absolue aussi bien que la norme ponctuelle pour la métrique g) :

$$\begin{aligned} |I_t| &\leq \int_{\Sigma_t} |u| |i_{e_r} v| \\ &\leq \left(\int_{\Sigma_t} |u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On va montrer que le fait que ∇u soit L^2 permet d'avoir une bonne majoration de $\int_{\Sigma_t} |u|^2$. Et comme $i_{e_r} v$ est L^2 (car v l'est aussi), $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2$ ne peut pas croître trop vite quand t tend vers 0. Ce deux résultats nous permettront d'affirmer que I_{t_n} tend vers 0 pour une suite t_n tendant vers 0.

En tout point où $|u| \neq 0$, la fonction $|u|$ est dérivable, et $d|u|(x) = g(\nabla_x u, \frac{u}{|u|})$. On pose

$$\frac{\partial |u|}{\partial r} = g(\nabla_{e_r} u, \frac{u}{|u|})$$

si $|u| \neq 0$, et $\frac{\partial |u|}{\partial r} = 0$ sinon. Il s'agit de la dérivée partielle distributionnelle de $|u|$, au sens où l'on a, si les coordonnées autres que r restent fixées,

$$|u(t)| - |u(a)| = \int_a^t \frac{\partial |u|}{\partial r}(r) dr.$$

Or $|\frac{\partial |u|}{\partial r}| \leq |\nabla_{e_r} u|$, et donc, si $t \leq a$,

$$|u(t)| \leq |u(a)| + \int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr$$

et

$$|u(t)|^2 \leq 2|u(a)|^2 + 2 \left(\int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr \right)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$\begin{aligned} \left(\int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr \right)^2 &\leq \int_t^a \frac{dr}{r} \int_t^a r |\nabla_{e_r} u|^2 dr \\ &\leq |\ln(\frac{t}{a})| \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \end{aligned}$$

En intégrant sur Σ_t on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} |u|^2 &\leq \int_{\Sigma_t} 2|u(a)|^2 + \int_{\Sigma_t} \left(2\ln\left(\frac{t}{a}\right) \int_t^a r |\nabla_{e_r} u|^2 dr \right) \\
&\leq 2 \int_{\Sigma_t} |u(a)|^2 + 2\left|\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right| \int_{\Sigma_t} \int_t^a r |\nabla_{e_r} u|^2 dr \\
&\leq 2 \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} |u(a)|^2 t d\theta d\text{vol}_{\Sigma} + 2\left|\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \left(\int_t^a r |\nabla_{e_r} u|^2 dr \right) t d\theta d\text{vol}_{\Sigma} \\
&\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t\left|\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_t^a |\nabla_{e_r} u|^2 r dr d\theta d\text{vol}_{\Sigma} \\
&\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t\left|\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right| \int_{U_a} |\nabla_{e_r} u|^2 \\
&\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t\left|\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right| \int_{U_a} |\nabla u|^2 \\
&= O(t|\ln(t)|)
\end{aligned} \tag{5}$$

Il reste à contrôler le terme $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2 \leq \int_{\Sigma_t} |v|^2$. Comme v est L^2 ,

$$\int_0^a \left(\int_{\Sigma_t} |v|^2 \right) dt = \int_{U_a} |v|^2 < +\infty,$$

et donc la fonction $t \mapsto \int_{\Sigma_t} |v|^2$ est intégrable sur $]0, a]$. Or la fonction $(t \ln(t))^{-1}$ n'est pas intégrable en 0. On en déduit donc qu'il existe une suite t_n tendant vers 0 pour laquelle

$$\int_{\Sigma_{t_n}} |v|^2 = o((t_n \ln(t_n))^{-1}).$$

En combinant avec la majoration (5) pour $\int_{\Sigma_t} |u|^2$, on en déduit immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{t_n} = 0.$$

Or $I_t \rightarrow \langle u, \nabla^* v \rangle - \langle \nabla u, v \rangle$ quand $t \rightarrow 0$; on a donc bien $\langle u, \nabla^* v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle$. \square

Remarque : dans les théorèmes ci-dessus, la condition L^2 paraît naturelle, ne serait-ce que pour s'assurer de l'existence des termes du type $\langle \nabla u, v \rangle$. Cependant il est intéressant de noter que la démonstration donnée du théorème 3.5 ne fonctionne pas avec des hypothèses du type $u, \nabla u \in L^p$ et $v, \nabla^* v \in L^q$, avec p et q des exposants conjugués. La condition L^2 est donc plus importante qu'il n'y paraît.

Ces deux formules de Stokes ont une interprétation en terme d'opérateurs non bornés. Au vue de la définition de l'extension maximale d'un opérateur, il est clair qu'en passant à la limite dans les formules de Stokes 3.4 et 3.5, on obtient

$$\langle \eta, \delta_{\max} \sigma \rangle = \langle d_{\max} \eta, \sigma \rangle \text{ et}$$

$$\langle u, \nabla_{\max}^* v \rangle = \langle \nabla_{\max} u, v \rangle$$

quel que soient $\eta \in D(d_{\max})$, $\sigma \in D(\delta_{\max})$, $u \in D(\nabla_{\max})$ et $v \in D(\nabla_{\max}^*)$. On en déduit immédiatement (cf aussi [11]) que :

Corollaire 3.6. *Les opérateurs d_{\max} et δ_{\max} sont adjoints l'un de l'autre ; on a $d_{\max} = d_{\min}$ et $\delta_{\max} = \delta_{\min}$.*

Les opérateurs ∇_{\max} et ∇_{\max}^ sont adjoints l'un de l'autre ; on a $\nabla_{\max} = \nabla_{\min}$ et $\nabla_{\max}^* = \nabla_{\min}^*$.*

Dans la suite les notations ∇ et ∇^* désigneront donc (sauf exception) les opérateurs $\nabla_{\max}(= \nabla_{\min})$ et $\nabla_{\max}^*(= \nabla_{\min}^*)$. Puisqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on utilisera épisodiquement la notation $L^{1,2}$ (resp. $L^{2,2}$) à la place de $D(\nabla)$ (resp. $D(\nabla \circ \nabla)$).

On emploiera fréquemment le corollaire suivant, simple reformulation du précédent :

Corollaire 3.7. *Soit u appartenant à $D(\nabla)$, c'est-à-dire tel que u et ∇u sont L^2 . Alors il existe une suite (u_n) , C^∞ à support compact, telle que $u_n \rightarrow u$ et $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ dans L^2 quand $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. C'est juste la définition de $u \in D(\nabla_{\min})$. □

Les techniques développées dans la démonstration du théorème 3.5, et en particulier la majoration (5), vont nous permettre de montrer deux autres résultats dans la même lignée. Commençons par la proposition suivante, qui simplifiera plusieurs preuves par la suite :

Proposition 3.8. *Soit u une section de $T^{(r,s)}M$ telle que u , $\nabla_{e_r}u$ et $\nabla^*\nabla u$ soient dans L^2 . Alors ∇u appartient à $L^2(T^{(r+1,s)}M)$.*

Démonstration. La preuve est juste une relecture de la démonstration du théorème 3.5. Plus précisément, on constate que pour démontrer l'existence d'une suite t_n tendant vers 0 telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{t_n}} g|_{\Sigma_{t_n}}(u, i_{e_r}(v)) = 0,$$

il suffit que $\nabla_{e_r}u$ et $i_{e_r}(v)$ soient L^2 . Quand $v = \nabla u$ comme c'est le cas ici, ces deux conditions reviennent à une seule, à savoir $\nabla_{e_r}u \in L^2$.

On applique cela à l'égalité (4)

$$\int_{M_{t_n}} g(\nabla u, \nabla u) = \int_{M_{t_n}} g(u, \nabla^*\nabla u) - \int_{\Sigma_{t_n}} g|_{\Sigma_{t_n}}(u, \nabla_{e_r}u).$$

Comme u et $\nabla^*\nabla u$ sont L^2 , le terme $\int_{M_{t_n}} g(u, \nabla^*\nabla u)$ converge vers $\langle u, \nabla^*\nabla u \rangle$ quand t_n tend vers 0, et comme le deuxième terme de droite tend vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{M_{t_n}} g(\nabla u, \nabla u) = \langle u, \nabla^*\nabla u \rangle.$$

L'existence de cette limite, plus le fait que $g(\nabla u, \nabla u)$ est partout positif, montre que ∇u appartient à L^2 et que $\|\nabla u\|^2 = \langle u, \nabla^*\nabla u \rangle$. □

Le résultat suivant, moins anecdotique, nous renseigne encore sur la dérivée covariante (je remercie chaleureusement Gilles Carron pour m'avoir donné l'idée de la preuve) :

Théorème 3.9. *L'image de l'opérateur $\nabla : L^{1,2}(T^{(r,s)}M) \rightarrow L^2(T^{(r+1,s)})$ est fermée.*

Démonstration. On va procéder en deux temps : on va regarder ce qu'il se passe en dehors du lieu singulier, puis au voisinage du lieu singulier. On reprend les notations de la démonstration du théorème 3.5. Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a -voisinage fermé du lieu singulier Σ dans M soit tubulaire, et on suppose donné un réel b tel que $0 < b < a$ (on verra ensuite comment choisir b). Pour $t \leq a$, on note U_t le t -voisinage de Σ dans M , $\Sigma_t = \partial U_t$, et $M_t = M \setminus U_t$. On pose aussi $\Omega = M_b = M \setminus U_b$.

Commençons par regarder ce qui se passe sur Ω . C'est un domaine de M , à bord lisse. On va montrer que l'image de ∇ (ou plutôt de son extension maximale) y est fermée.

Sur Ω , les extensions minimales et maximales de la dérivée covariante sont distinctes. On considère alors l'opérateur $L_N = \nabla_{\min|\Omega}^* \circ \nabla_{\max|\Omega}$; il s'agit de l'extension de Neumann du laplacien de connexion $\nabla^* \nabla$ sur Ω . Il est auto-adjoint (corollaire 3.3), positif, de spectre discret. Pour tout v appartenant à $D(L_N)$, on a

$$\int_{\Omega} g(L_N v, v) = \int_{\Omega} g(\nabla_{\max|\Omega} v, \nabla_{\max|\Omega} v);$$

le noyau de L_N coïncide donc avec celui de $\nabla_{\max|\Omega}$, c'est exactement l'ensemble des sections parallèles sur Ω . Notons λ la première valeur propre non nulle de L_N . D'après la classique formule du minimax,

$$\lambda = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} g(\nabla_{\max|\Omega} v, \nabla_{\max|\Omega} v)}{\int_{\Omega} g(v, v)} \mid v \in D(\nabla_{\max|\Omega}) \cap (\ker \nabla_{\max|\Omega})^{\perp}, v \neq 0 \right\}.$$

En particulier, si v appartient à $D(\nabla_{\max|\Omega}) \cap (\ker \nabla_{\max|\Omega})^{\perp}$, alors

$$\|v\| \leq (\lambda)^{1/2} \|\nabla_{\max|\Omega} v\| \quad (6)$$

(il s'agit des normes L^2 sur Ω). Cette inégalité suffit à montrer que l'image de $\nabla_{\max|\Omega}$ est fermée. En effet, soit (v_n) une suite de $D(\nabla_{\max|\Omega})$ telle que la suite $(\nabla_{\max|\Omega} v_n)$ converge en norme L^2 vers une limite l . On note p_n le projeté orthogonal de v_n sur $(\ker \nabla_{\max|\Omega})^{\perp}$. Alors $\nabla_{\max|\Omega} p_n = \nabla_{\max|\Omega} v_n$, et la suite des $\nabla_{\max|\Omega} p_n$ est donc de Cauchy. En appliquant l'inégalité (6) à $p_{n+k} - p_n$, on montre directement que la suite (p_n) est de Cauchy, donc converge vers une limite p . Maintenant, comme $\nabla_{\max|\Omega}$ est un opérateur fermé, la limite p appartient à $D(\nabla_{\max|\Omega})$ et $\nabla_{\max|\Omega} p = l$, ce qui termine de montrer que l'image de $\nabla_{\max|\Omega}$ est fermée.

On va maintenant montrer que sur U_a , l'image de l'extension minimale de la dérivée covariante est fermée. On utilise pour cela la même majoration (5) que pour la démonstration du théorème 3.5, qui donne, pour toute section u lisse, L^2 , à dérivée covariante L^2 ,

$$\int_{\Sigma_t} |u(t)|^2 \leq 2 \frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t \left| \ln \left(\frac{t}{a} \right) \right| \int_{U_a} |\nabla u|^2.$$

En fait cette inégalité est pour une métrique plate sur le cône. Dans le cas général la même majoration est vraie, à un facteur multiplicatif c^2 près. Si u est à support compact dans U_a , alors u est nul sur Σ_a , et en intégrant ce qu'il reste entre 0 et a , on obtient $\|u\| \leq \frac{ac}{\sqrt{2}} \|\nabla u\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2 sur U_a . Par passage à la limite, on a

$$\|u\| \leq \frac{ac}{\sqrt{2}} \|\nabla_{\min|U_a} u\| \quad (7)$$

pour tout u appartenant à $D(\nabla_{\min|U_a})$. Cette inégalité (une sorte de lemme de Poincaré) implique, comme précédemment, que l'image de $\nabla_{\min|U_a}$ est fermée. En effet, soit (v_n) une suite de $D(\nabla_{\min|U_a})$ telle que la suite $(\nabla_{\min|U_a} v_n)$ converge en norme L^2 vers une limite l . La suite $(\nabla_{\min|U_a} v_n)$ est donc de Cauchy, et en appliquant l'inégalité (7) à $v_{n+k} - v_n$, on montre directement que la suite (v_n) est de Cauchy, donc converge vers une limite v , qui vérifie (l'opérateur $\nabla_{\min|U_a}$ étant fermé) $v \in D(\nabla_{\min|U_a})$ et $\nabla_{\min|U_a} v = l$, ce qui termine de montrer que l'image de $\nabla_{\min|U_a}$ est fermée.

Voyons maintenant comment en déduire un résultat sur tout M . Soit w un point de l'adhérence de l'image de ∇ . Il existe alors une suite (u_n) d'éléments de $D(\nabla)$, que l'on peut tous choisir C^∞ , telle que la suite ∇u_n converge vers w . On regarde alors la restriction de u_n à Ω : $u_n|_{\Omega}$ appartient à $D(\nabla_{\max|\Omega})$, et $\nabla_{\max|\Omega} u_n|_{\Omega}$ converge vers $w|_{\Omega}$. Alors on a vu que la suite des projections orthogonales des $u_n|_{\Omega}$ sur $(\ker \nabla_{\max|\Omega})^{\perp}$ était convergente, c'est-à-dire qu'il existe une suite h_n de sections parallèles sur Ω telle que la suite $(u_n|_{\Omega} - h_n)$ converge en norme L^2 sur Ω .

Si tous les h_n sont nuls (par exemple si le fibré n'admet pas de sections parallèles locales), ou si tous les h_n se prolongent en des sections parallèles sur tout M , on peut terminer la preuve facilement. A la place de la suite (u_n) , on s'intéresse à la suite des $v_n = u_n - h_n$, et on vient de voir que cette suite converge en norme L^2 sur Ω .

On choisit ensuite une fonction de coupure ρ , telle que ρ soit lisse, à support dans U_a , et identiquement égale à 1 sur U_b . Alors pour tout n , ρv_n appartient à $D(\nabla_{\min|U_a})$, et

$$\nabla_{\min|U_a} \rho v_n = \nabla \rho v_n = \rho \nabla v_n + d\rho \otimes v_n = \rho \nabla u_n + d\rho \otimes v_n.$$

Comme ∇u_n converge vers w et que ρ est bornée, la suite $(\rho \nabla u_n)$ converge en norme L^2 sur U_a vers ρw . D'autre part $d\rho$ est bornée, à support dans $U_a \setminus U_b$ qui est inclus dans Ω ; et comme la suite (v_n) est convergente sur Ω , donc sur $U_a \setminus U_b$, la suite $(d\rho \otimes v_n)$ est aussi convergente en norme L^2 sur U_a . La suite $(\nabla_{\min|U_a} \rho v_n)$ est donc convergente sur U_a , ce qui implique directement à l'aide de l'inégalité (7) la convergence de la suite ρv_n sur U_a . Comme ρ est identiquement égale à 1 sur U_b , on en déduit la convergence de la suite $(v_n|_{U_b})$ en norme L^2 sur U_b . Or on a vu qu'en plus $(v_n|_{\Omega})$ converge sur $\Omega = M \setminus U_b$. La suite (v_n) converge donc en norme L^2 sur M entier vers une limite v . Et comme l'opérateur ∇ est fermé, v appartient à $D(\nabla)$ et vérifie $\nabla v = w$, ce qui termine de montrer dans ce cas que $\text{Im } \nabla$ est fermée.

Pour conclure, il suffit de montrer que l'on peut toujours choisir b tel que toute section parallèle sur $\Omega = M \setminus U_b$ se prolonge en section parallèle sur tout M . Pour cela, on utilise les deux faits suivants. D'une part, l'espace des sections parallèles sur $M_t = M \setminus U_t$ est un espace vectoriel de dimension finie. En effet, une section parallèle sur (une composante connexe d') un ouvert est entièrement déterminée par sa valeur en un point. D'autre part, si $0 < t < t' < a$, alors $M_{t'} \subset M_t$, et l'espace des sections parallèles sur M_t est inclus dans l'espace des sections parallèles sur $M_{t'}$ (plus formellement, s'injecte via l'application de restriction dans...). Ainsi quand t tend en décroissant vers 0, l'espace des sections parallèles sur M_t , qui est de dimension finie, décroît aussi, donc finit par être constant. C'est-à-dire qu'il existe un réel t_0 , $0 < t_0 < a$, tel que pour tout t inférieur à t_0 , l'espace des sections parallèles sur M_t et sur M_{t_0} coïncide : toute section parallèle sur M_{t_0} se prolonge en section parallèle sur M_t . Et comme cette dernière propriété est vraie pour tout $t \in]0, t_0]$, on en déduit que toute section parallèle sur M_{t_0} se prolonge en une section parallèle de M . On choisit alors $b = t_0$ pour terminer la démonstration. \square

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.10. *On considère l'opérateur $\nabla : L^{1,2}(T^{(r,s)}M) \rightarrow L^2(T^{(r+1,s)})$. Il existe une constante c telle que pour tout élément $\xi \in \text{Im } \nabla$, il existe une section $\zeta \in L^{1,2}(T^{(r,s)}M)$ vérifiant $\nabla \zeta = \xi$ et $\|\zeta\| \leq c\|\xi\|$.*

Démonstration. L'espace $L^{1,2}(T^{(r,s)}M)$ est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v \rangle_2 = \langle u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle$. L'application ∇ est alors continue pour la norme $\|\cdot\|_2$ associée. Sa restriction à $(\ker \nabla)^\perp$ (où l'orthogonalité est au sens du produit scalaire sus-cité) est une application linéaire, continue, bijective ; c'est donc un isomorphisme d'après le théorème de l'image ouverte. Il existe alors une constante c' telle que $\|\zeta\|_2 \leq c'\|\nabla \zeta\|$ pour tout $\zeta \in (\ker \nabla)^\perp$. Comme $\|\zeta\|_2^2 = \|\zeta\|^2 + \|\nabla \zeta\|^2$, on en déduit immédiatement que $\|\zeta\| \leq c\|\nabla \zeta\|$ pour tout $u \in (\ker \nabla)^\perp$, avec $c^2 = c'^2 - 1$. Pour conclure, étant donné $\xi \in \text{Im } \nabla$, il suffit de prendre pour ζ son unique antécédent dans $(\ker \nabla)^\perp$. \square

4 Normalisation par la jauge de Bianchi

Comme on l'a vu dans la section 2.3, pour se débarrasser des déformations triviales on cherche à imposer la condition de jauge de Bianchi. Montrer qu'une déformation infinitésimale h_0 peut se mettre

sous une forme normalisée vérifiant la condition de jauge revient à trouver une 1-forme η telle que

$$h_0 - \delta^* \eta \in \ker \beta,$$

ce qui équivaut à résoudre l'équation de normalisation (3) :

$$\beta \circ \delta^* \eta = \beta h_0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus lisible. Pour cela, on utilise le fait que

$$\nabla \eta = \delta^* \eta + \frac{1}{2} d\eta$$

(il s'agit juste de la décomposition du 2-tenseur $\nabla \eta$ en partie symétrique et anti-symétrique), que δ est toujours la restriction de ∇^* au sous-fibré correspondant, et donc que

$$\delta \eta = \nabla^* \eta = -\text{tr} \nabla \eta = -\text{tr} \delta^* \eta,$$

la trace de $d\eta$ étant nulle puisque $d\eta$ est anti-symétrique. On obtient alors

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^* \eta) &= 2\delta \delta^* \eta + d\text{tr} \delta^* \eta \\ &= 2\nabla^* (\nabla \eta - \frac{1}{2} d\eta) - d\delta \eta \\ &= 2\nabla^* \nabla \eta - \delta d\eta - d\delta \eta \\ &= 2\nabla^* \nabla \eta - \Delta \eta. \end{aligned}$$

Ici $\Delta = d\delta + \delta d$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les 1-formes. Or Δ et $\nabla^* \nabla$ (parfois nommé *laplacien de connexion*) sont reliés par la classique formule de Weitzenböck

$$\Delta \eta = \nabla^* \nabla \eta + \text{ric}(\eta), \tag{8}$$

voir [2] §1.155. En utilisant cette formule, on trouve

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^* \eta) &= \Delta \eta - 2\text{ric}(\eta) \\ &= \nabla^* \nabla \eta - \text{ric}(\eta). \end{aligned}$$

Pour une métrique Einstein, $\text{ric}(\eta) = c\eta$, et l'expression ci-dessus se simplifie encore. Dans le cas qui nous intéresse, la constante c vaut $-(n-1)$, et

$$2\beta(\delta^* \eta) = \nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta. \tag{9}$$

On sera donc amené à étudier l'opérateur $L : \eta \mapsto \nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta$.

4.1 Un premier résultat

Le théorème suivant montre que pour toute déformation infinitésimale $h \in L^2(S^2 M)$, il existe une (unique) 1-forme $\eta \in D(\delta_{min}^*)$ telle que $h - \delta^* \eta$ vérifie (distributionnellement) la condition de jauge de Bianchi $\beta(h - \delta^* \eta) = 0$. On peut donc normaliser en un certain sens toute déformation infinitésimale L^2 , de façon unique. Ce résultat est assez général puisqu'on suppose juste que la métrique conique est Einstein à courbure de Ricci négative ; il n'y a pas de limitations à la valeur des angles coniques.

Théorème 4.1. *Soit M une cône-variété Einstein à courbure de Ricci négative. On a la décomposition suivante*

$$L^2(S^2 M) = \ker \beta_{max} \oplus \text{Im} \delta_{min}^*$$

Quitte à multiplier la métrique g par une constante (voir section 2.3), on va supposer dans la suite qu'elle vérifie $E(g) = \text{ric}(g) + (n-1)g = 0$. La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs résultats intermédiaires, regroupés dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.

1. Le sous-espace $\text{Im } \delta_{\min}^*$ est fermé dans $L^2(S^2M)$.
2. Les domaines $D(\delta_{\min}^*)$, $D(\nabla)$ et $D(\beta_{\min}^t)$ sont égaux.
3. Les deux sous-espaces $\text{Im } \delta_{\min}^*$ et $\ker \beta_{\max}$ sont en somme directe (i.e. $\text{Im } \delta_{\min}^* \cap \ker \beta_{\max} = \{0\}$), et la projection canonique de $\ker \beta_{\max} \oplus \text{Im } \delta_{\min}^*$ sur le deuxième facteur est une application linéaire continue.

Démonstration du 1. Si η appartient à C_0^∞ , alors

$$\begin{aligned} \|\delta^*\eta\|^2 &= \langle \delta^*\eta, \delta^*\eta \rangle \\ &= \langle \delta\delta^*\eta, \eta \rangle \\ &= \langle \nabla^*(\nabla\eta - \frac{1}{2}d\eta), \eta \rangle \\ &= \langle \nabla^*\nabla\eta - \frac{1}{2}\delta d\eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Weitzenböck (8) $\Delta\eta = d\delta\eta + \delta d\eta = \nabla^*\nabla\eta - (n-1)\eta$:

$$\begin{aligned} \|\delta^*\eta\|^2 &= \langle \nabla^*\nabla\eta - \frac{1}{2}\delta d\eta, \eta \rangle \\ &= \langle d\delta\eta + \delta d\eta + (n-1)\eta - \frac{1}{2}\delta d\eta, \eta \rangle \\ &= \langle d\delta\eta + \frac{1}{2}\delta d\eta + (n-1)\eta, \eta \rangle \\ &= \|\delta\eta\|^2 + \frac{1}{2}\|d\eta\|^2 + (n-1)\|\eta\|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

et donc

$$\|\delta^*\eta\|^2 \geq (n-1)\|\eta\|^2.$$

Cette inégalité est encore vraie si $\eta \in D(\delta_{\min}^*)$; il suffit de considérer une suite η_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^*\eta_n = \delta_{\min}^*\eta$.

Cette inégalité implique immédiatement que $\text{Im } \delta_{\min}^*$ est fermée dans L^2 . En effet, si $x_n \in \text{Im } \delta_{\min}^*$ converge vers x dans L^2 , alors il existe une suite η_n dans $D(\delta_{\min}^*)$ telle que $x_n = \delta_{\min}^*\eta_n$; la suite (x_n) est de Cauchy, et comme pour tout n, p on a

$$\|x_p - x_n\| = \|\delta_{\min}^*(\eta_p - \eta_n)\| \geq \sqrt{n-1}\|\eta_p - \eta_n\|,$$

la suite (η_n) est aussi de Cauchy, donc converge vers un élément η de L^2 . On a alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\min}^*\eta_n = x$; comme l'opérateur δ_{\min}^* est fermé, on en déduit que $\eta \in D(\delta_{\min}^*)$ et que $x = \delta_{\min}^*\eta$, donc que x appartient à $\text{Im } \delta_{\min}^*$, ce qui montre que $\text{Im } \delta_{\min}^*$ est fermée.

Démonstration du 2. Revenons au calcul (10) : si on utilise différemment la formule de Weitzenböck, on trouve

$$\begin{aligned} \|\delta^*\eta\|^2 &= \langle \nabla^*\nabla\eta - \frac{1}{2}\delta d\eta, \eta \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla\eta + \Delta\eta + (n-1)\eta - \delta d\eta, \eta \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla\eta + (n-1)\eta + d\delta\eta, \eta \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\|\nabla\eta\|^2 + (n-1)\|\eta\|^2 + \|\delta\eta\|^2), \end{aligned}$$

et donc $\|\delta^*\eta\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2$, ceci étant valable pour $\eta \in C_0^\infty$. Si $\eta \in D(\delta_{min}^*)$, on prend une suite η_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^*\eta_n = \delta_{min}^*\eta$. La suite $(\delta^*\eta_n)$ est donc de Cauchy, et l'inégalité ci-dessus implique que la suite $(\nabla\eta_n)$ est aussi de Cauchy, donc converge vers un élément x dans L^2 . Comme $\eta_n \in C_0^\infty \subset D(\nabla)$ et que l'opérateur ∇ est fermé, on en déduit que $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n$ appartient à $D(\nabla)$, et donc que $D(\nabla) \subset D(\delta_{min}^*)$. On en déduit aussi que l'inégalité $\|\delta^*\eta\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2$ est vraie pour tout $\eta \in D(\delta_{min}^*)$.

Maintenant, $\delta^*\eta$ étant la partie symétrique de $\nabla\eta$, on a aussi $\|\delta^*\eta\| \leq \|\nabla\eta\|$, et le même argument montre que $D(\delta_{min}^*) \subset D(\nabla)$, et donc $D(\delta_{min}^*) = D(\nabla)$. Au passage on a aussi

$$\frac{1}{2}\|\nabla\eta\|^2 \leq \|\delta_{min}^*\eta\|^2 \leq \|\nabla\eta\|^2$$

pour tout $\eta \in D(\nabla) = D(\delta_{min}^*)$.

Montrons ensuite que $D(\delta_{min}^*) = D(\beta_{min}^t)$. On rappelle que β^t est l'adjoint formel de β , c'est-à-dire que pour $\eta \in C_0^\infty$, $\beta^t\eta = \delta^*\eta + \frac{1}{2}(\delta\eta)g$. Maintenant si $\eta \in D(\delta_{min}^*)$, on prend une suite η_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^*\eta_n = \delta_{min}^*\eta$. Comme $(\delta\eta_n)g = -(\text{tr}(\delta^*\eta_n))g$, la suite $((\delta\eta_n)g)$ est aussi convergente, donc $\beta^t\eta_n = \delta^*\eta_n + \frac{1}{2}(\delta\eta_n)g$ converge dans L^2 . Ceci implique que $\eta \in D(\beta_{min}^t)$ par définition de l'extension minimale β_{min}^t , et donc $D(\delta_{min}^*) \subset D(\beta_{min}^t)$.

Réciproquement, si $\eta \in D(\beta_{min}^t)$, on prend une suite η_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta^t\eta_n = \beta_{min}^t\eta$. Comme $\text{tr} \beta^t\eta_n = \frac{n-2}{2}\delta\eta_n$ et que $n > 2$, on en déduit que la suite $(\delta\eta_n)$ est aussi convergente, ainsi donc que $\delta^*\eta_n = \beta^t\eta_n - \frac{1}{2}(\delta\eta_n)g$. Par suite, l'opérateur δ_{min}^* étant fermé, η appartient bien à $D(\delta_{min}^*)$, et $D(\beta_{min}^t) \subset D(\delta_{min}^*)$.

Remarque : On peut démontrer exactement de la même façon que $D(\delta_{max}^*) = D(\beta_{max}^t)$; il suffit juste de remplacer C_0^∞ par C^∞ dans les deux derniers paragraphes.

Démonstration du 3. Soit $\eta \in D(\delta_{min}^*)$ tel que $\delta_{min}^*\eta \in \ker \beta_{max}$. Alors on a (au sens des distributions au moins)

$$0 = \beta\delta^*\eta = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla\eta + (n-1)\eta).$$

Comme η est L^2 , $\nabla^*\nabla\eta$ est aussi L^2 ; et comme $\eta \in D(\delta_{min}^*) = D(\nabla)$, $\nabla\eta$ est aussi L^2 . On peut alors faire une intégration par partie contre η pour trouver

$$\|\nabla\eta\|^2 + (n-1)\|\eta\|^2 = 0$$

et donc $\eta = 0$ et $\delta_{min}^*\eta = 0$. Cela montre que $\text{Im } \delta_{min}^*$ et $\ker \beta_{max}$ sont en somme directe.

Pour démontrer la deuxième partie de ce point on aura besoin du lemme technique suivant :

Lemme 4.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que quel que soit η appartenant à $D(\delta_{min}^*)$, on a*

$$\langle \delta_{min}^*\eta, \beta_{min}^t\eta \rangle \geq c\|\delta_{min}^*\eta\| \cdot \|\beta_{min}^t\eta\|.$$

Démonstration du lemme. On commence par une majoration : si η est C_0^∞ , alors

$$\begin{aligned} \|\beta^t\eta\| &= \|\delta^*\eta + \frac{1}{2}(\delta\eta)g\| \\ &\leq \|\delta^*\eta\| + \frac{n}{2}\|\frac{1}{n}(\delta\eta)g\|. \end{aligned}$$

Comme $\delta^*\eta$ et $\frac{1}{n}(\delta\eta)g$ sont respectivement la partie symétrique et la partie en trace de $\nabla\eta$, on a $\|\delta^*\eta\| \leq \|\nabla\eta\|$ et $\|\frac{1}{n}(\delta\eta)g\| \leq \|\nabla\eta\|$, donc

$$\|\beta^t\eta\| \leq \frac{n+2}{2}\|\nabla\eta\|.$$

Ensuite, toujours pour $\eta \in C_0^\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \delta^* \eta, \beta^t \eta \rangle &= \langle \beta \circ \delta^* \eta, \eta \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta, \eta \rangle \\
&= \frac{1}{2} \|\nabla \eta\|^2 + \frac{n-1}{2} \|\eta\|^2 \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla \eta\|^2.
\end{aligned}$$

Comme $\|\nabla \eta\| \geq \|\delta^* \eta\|$ et $\|\nabla \eta\| \geq \frac{2}{n+2} \|\beta^t \eta\|$, on a

$$\langle \delta^* \eta, \beta^t \eta \rangle \geq \frac{1}{n+2} \|\delta^* \eta\| \cdot \|\beta^t \eta\|.$$

Maintenant si η appartient à $D(\delta_{min}^*) = D(\nabla)$, on prend une suite $\eta_n \in C_0^\infty$ telle que η_n tend vers η et $\nabla \eta_n$ tend vers $\nabla \eta$; alors $\delta^* \eta_n$ et $\beta^t \eta_n$ convergent respectivement vers $\delta_{min}^* \eta$ et $\beta_{min}^t \eta$, et en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus on trouve le résultat voulu avec $c = \frac{1}{n+2}$. \square

Revenons à la démonstration de la continuité de la projection canonique de $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ sur le deuxième facteur. Ce que le lemme précédent nous montre, c'est que pour tout élément de $\text{Im } \delta_{min}^*$, il existe un élément de $\text{Im } \beta_{min}^t \subset (\ker \beta_{max})^\perp$ tel que l'angle entre les deux reste éloigné de $\pi/2$. Cette propriété va permettre d'estimer la norme du projeté sur $\text{Im } \delta_{min}^*$ à partir de la norme du projeté orthogonal sur $(\ker \beta_{max})^\perp$. C'est ce qui va assurer la continuité.

Soit $x = h + \delta_{min}^* \eta \in \ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ (avec $h \in \ker \beta_{max}$), on veut montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|\delta_{min}^* \eta\| \leq C \|x\|$. Notons p le projeté orthogonal de $\delta_{min}^* \eta$ sur $(\ker \beta_{max})^\perp$: on a $\delta_{min}^* \eta = p + k$ avec $k \in \ker(\beta_{max})$. Par définition de la projection orthogonale, $\|k\|^2 = \inf \{ \|\delta_{min}^* \eta - y\|^2 \mid y \in (\ker \beta_{max})^\perp \}$.

Pour majorer $\|k\|^2$ on va choisir un bon y . On sait que $\ker(\beta_{max})^\perp = \overline{\text{Im } \beta_{min}^t}$; en particulier $\beta_{min}^t \eta \in \ker(\beta_{max})^\perp$. Si $\beta_{min}^t \eta = 0$, alors en prenant la trace on trouve $\delta \eta = 0$ puis $\delta_{min}^* \eta = 0$, et dans ce cas on a bien $\|\delta_{min}^* \eta\| \leq C \|x\|$.

Si $\beta_{min}^t \eta \neq 0$, on note p' le projeté orthogonal de $\delta_{min}^* \eta$ sur $\text{Vect}(\beta_{min}^t \eta)$; on a

$$p' = \langle \delta_{min}^* \eta, \frac{\beta_{min}^t \eta}{\|\beta_{min}^t \eta\|} \rangle \frac{\beta_{min}^t \eta}{\|\beta_{min}^t \eta\|},$$

et $\|\delta_{min}^* \eta\|^2 = \|p'\|^2 + \|\delta_{min}^* \eta - p'\|^2$. Comme $p' \in (\ker \beta_{max})^\perp$, d'après la définition de la projection orthogonale on a

$$\begin{aligned}
\|k\|^2 &\leq \|\delta_{min}^* \eta - p'\|^2 \\
&\leq \|\delta_{min}^* \eta\|^2 - \|p'\|^2 \\
&\leq \|\delta_{min}^* \eta\|^2 - \langle \delta_{min}^* \eta, \frac{\beta_{min}^t \eta}{\|\beta_{min}^t \eta\|} \rangle^2.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned}
\|k\|^2 &\leq \|\delta_{min}^* \eta\|^2 - \frac{1}{(n+2)^2} \|\delta_{min}^* \eta\|^2 \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right) \|\delta_{min}^* \eta\|^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|p\|^2 &= \|\delta_{min}^* \eta\|^2 - \|k\|^2 \\
&\geq \left(1 - \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)\right) \|\delta_{min}^* \eta\|^2 \\
&\geq \frac{1}{(n+2)^2} \|\delta_{min}^* \eta\|^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme $x = h + \delta_{min}^* \eta = h + k + p$, avec h et k dans $\ker \beta_{max}$ et p dans $(\ker \beta_{max})^\perp$, on a

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|h + k\|^2 + \|p\|^2 \\
&\geq \|p\|^2 \\
&\geq \frac{1}{(n+2)^2} \|\delta_{min}^* \eta\|^2,
\end{aligned}$$

soit $\|\delta_{min}^* \eta\| \leq (n+2)\|x\|$, et on a bien montré ce qu'on voulait, à savoir la continuité de la projection canonique de $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ sur $\text{Im } \delta_{min}^*$. \square

Démonstration du théorème 4.1. La démonstration se fait en deux étapes. On montre d'abord que C_0^∞ est un sous-espace de $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$, puis que $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ est un sous-espace vectoriel fermé de L^2 . La densité de C_0^∞ dans L^2 permet ensuite de conclure.

Montrons que $C_0^\infty \subset \ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$:

Soit $\phi \in C_0^\infty$. On cherche à écrire $\phi = k + \delta_{min}^* \eta$ avec $k \in \ker \beta_{max}$. Or comme $2\beta \circ \delta^* = \nabla^* \nabla + (n-1)Id$, on peut trouver une solution de l'équation $\beta(\phi) = \beta(\delta^* \eta)$ avec $\eta, \nabla \eta, \nabla^* \nabla \eta$ dans L^2 . Mais si η et $\nabla \eta$ sont L^2 , alors $\eta \in D(\nabla) = D(\delta_{min}^*)$, et on a alors la décomposition voulue en écrivant $\phi = (\phi - \delta_{min}^* \eta) + \delta_{min}^* \eta$.

Avec tout le travail préparatoire qui a été fait dans la proposition 4.2, il est maintenant facile de montrer que $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ est un sous-espace vectoriel fermé de L^2 . En effet, si $x_n = h_n + \delta_{min}^* \eta_n$ est une suite de $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ convergeant vers $x \in L^2$, alors la suite $\delta_{min}^* \eta_n$ converge aussi par continuité, ainsi par conséquent que la suite $h_n = x_n - \delta_{min}^* \eta_n$. Or $\text{Im } \delta_{min}^*$ et $\ker \beta_{max}$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de L^2 (pour $\text{Im } \delta_{min}^*$, c'est le 1. de la proposition 4.2 ci-dessus ; et pour $\ker \beta_{max}$, c'est parce que par définition $\ker \beta_{max} = (\text{Im } \beta_{min}^t)^\perp$). Donc les limites des suites $(\delta_{min}^* \eta_n)$ et (h_n) sont respectivement dans $\text{Im } \delta_{min}^*$ et $\ker \beta_{max}$, et par suite $x = \lim x_n = \lim h_n + \lim \delta_{min}^* \eta_n$ appartient à $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ qui est par conséquent fermé.

Pour conclure, comme $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^*$ est fermé et contient C_0^∞ , il contient aussi son adhérence qui est l'espace L^2 tout entier, donc $\ker \beta_{max} \oplus \text{Im } \delta_{min}^* = L^2$. \square

Dans le cas où la métrique est hyperbolique, on peut encore raffiner un peu ce résultat.

Proposition 4.4. *Si M est une cône-variété hyperbolique, alors $\beta_{max} = \beta_{min}$, $\delta_{max}^* = \delta_{min}^*$. On note ces opérateurs simplement β et δ^* , et le théorème précédent devient $L^2(S^2 M) = \ker \beta \oplus \text{Im } \delta^*$.*

La démonstration de cette proposition demande de connaître le comportement des solutions de l'équation $\beta \circ \delta^* \eta = 0$, ce qui est l'objet des sections suivantes. Pour cette raison, la preuve est reportée en 5.2, p. 39.

Ces résultats sont encourageants : ils nous montrent que la condition de jauge de Bianchi est une "bonne" condition de jauge, puisqu'elle permet de normaliser toutes les déformations infinitésimales

L^2 . Malheureusement, ils ne sont pas suffisants, au sens où ils ne nous apprennent rien sur la régularité de la déformation normalisée. En particulier, si l'on part d'une déformation infinitésimale $h \in L^{1,2}$ (ce qui est le cas d'une déformation préservant les angles), alors on a aucune garantie que la déformation normalisée correspondante soit encore $L^{1,2}$. Ce phénomène de perte de régularité est due au caractère singulier de la métrique, qui interdit l'utilisation des résultats classiques de régularité elliptique.

Pour bien comprendre ce phénomène, on va procéder à une étude détaillée de l'équation de normalisation et de l'opérateur correspondant $L = \nabla^* \nabla + (n-1)Id$ au voisinage du lieu singulier, pour une métrique hyperbolique. On verra que le comportement des solutions est intimement relié à la valeur des angles coniques. On pourra alors donner des résultats plus précis sur la régularité des déformations normalisées dans le cas où les angles coniques sont suffisamment petits.

4.2 Etude de l'équation de normalisation

On supposera désormais dans toute la suite de cet article que la métrique conique g est *hyperbolique*. Le fait de connaître explicitement la forme de la métrique au voisinage du lieu singulier va nous permettre de travailler en coordonnées cylindriques locales et d'effectuer des décompositions du type séries de Fourier, ramenant ainsi une équation aux dérivées partielles à des équations différentielles ordinaires sur les coefficients.

Considérons donc l'opérateur $L : \eta \mapsto \nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta$. La première chose à remarquer sur l'opérateur L est qu'il est *elliptique*. En particulier, si ϕ est C^∞ et que $L\eta = \phi$ au sens des distributions, alors η est C^∞ . Cependant, le caractère singulier d'une cône-variété nous empêche d'utiliser directement les inégalités de type Schauder ou Gårding. Par exemple, on peut montrer qu'il existe des 1-formes η appartenant à L^2 telles que $L\eta = 0$ au sens des distributions avec $\nabla \eta$ qui n'est pas dans L^2 . Il va donc falloir faire attention aux domaines sur lesquels on se place.

Le théorème 3.2 nous un tel domaine : avec les conventions de la section 3.1, l'opérateur $\nabla^* \circ \nabla + (n-1)Id$ est auto-adjoint et inversible. Son domaine est par définition

$$D = \{\eta \in D(\nabla) \mid \nabla \eta \in D(\nabla^*)\} = \{\eta \in L^2 \mid \nabla \eta, \nabla^* \nabla \eta \in L^2\}$$

(dans la deuxième expression, il faut considérer ∇ et $\nabla^* \nabla$ au sens des distributions). Il s'agit en fait de l'extension de Friedrichs de L . Ainsi, pour tout $\phi \in L^2(T^*M)$, il existe une unique 1-forme η telle que $L\eta = \phi$ et que $\eta, \nabla \eta$ et $\nabla^* \nabla \eta$ soient dans L^2 (ce qui peut aussi se démontrer directement). Mais ces propriétés ne sont toujours pas satisfaisantes. On va dans cette section procéder à l'étude de l'opérateur L , dans le but d'arriver à démontrer, au moins dans certains cas, des propriétés supplémentaires sur les solutions de l'équation de normalisation.

4.2.1 Expression du laplacien de connexion en coordonnées cylindriques

Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a -voisinage fermé de Σ dans M soit un voisinage tubulaire. Si r est plus petit que a , on note U_r le r -voisinage de Σ dans M et Σ_r le bord de U_r .

Par définition, si x est un point de Σ , il existe un voisinage V de x dans U_a et un voisinage U de x dans Σ , tels que $U = V \cap \Sigma$ et $V \simeq U \times D^2$, et dans les coordonnées cylindriques locales adaptées à la décomposition $V \simeq U \times D^2$, la métrique est de la forme

$$g = dr^2 + \text{sh}(r)^2 d\theta^2 + \text{ch}(r)^2 g_\Sigma,$$

où θ est défini non pas modulo 2π mais modulo l'angle conique u . On utilisera les notations suivantes : $e^r = dr$, $e^\theta = \text{sh}(r)d\theta$, $e_r = (e^r)^\sharp = \frac{\partial}{\partial r}$, et $e_\theta = (e^\theta)^\sharp = \frac{1}{\text{sh}(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit η une section de T^*M . Au voisinage de Σ on peut faire une décomposition orthogonale et on écrit

$$\eta = fe^r + ge^\theta + \omega,$$

avec f, g , deux fonctions de M dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C} , on sera souvent amené dans la suite à complexifier les fibrés sur lesquels on travaille), et ω une 1-forme. On remarque que bien que les coordonnées ne soient que locales, les formes e^r et e^θ sont bien définies sur tout U_a , ainsi que la décomposition orthogonale précédente.

Au vu de la forme de notre voisinage tubulaire, sur tout ouvert V de U_a du type ci-dessus et suffisamment petit, on peut définir localement des champs de vecteurs e_1, \dots, e_{n-2} de telle sorte que $(e_r, e_\theta, e_1, \dots, e_{n-2})$ forme un repère mobile orthonormé (local), vérifiant

$$\nabla_{e_r} e_k = \nabla_{e_\theta} e_k = 0$$

pour tout k dans $1 \dots n-2$. On définit de même des 1-formes locales e^1, \dots, e^{n-2} telles que le repère $(e^r, e^\theta, e^1, \dots, e^{n-2})$ soit le repère mobile dual du précédent.

Avant de commencer les calculs, introduisons encore quelques notations. On note N le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a , dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T_x^*M orthogonal à e^θ et e^r , et N^* le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a , dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de $T_x M$ orthogonal à e_θ et e_r . La 1-forme ω introduite plus haut est naturellement une section de N . Les sections (e_1, \dots, e_{n-2}) forment localement une base de N^* , de même pour (e^1, \dots, e^{n-2}) et N . Si s est une section de N^* , et t une section de N ou de N^* , on note $\nabla_{\Sigma} s t$, ou de façon plus lisible $(\nabla_{\Sigma})(s, t)$, la projection orthogonale sur N ou sur N^* de $\nabla_s t$.

Si f est une fonction de U_a , on pose

$$d_{\Sigma} f = \sum_{k=1}^{n-2} (e_k \cdot f) e^k,$$

et

$$\Delta_{\Sigma} f = \text{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_{\Sigma})(e_k, e_k) \cdot f - e_k \cdot e_k \cdot f$$

(c'est à un facteur près l'opposé de la trace de la hessienne de f restreinte à N^*). Ces deux opérateurs sont indépendants du choix des e_k . En fait, avec les notations ci-dessus, dans V on a une identification, à r et θ fixé, de $U \times \{r, \theta\}$ à $U \subset \Sigma$, et N^* et N restreints à $U \times \{r, \theta\}$ s'identifient de la même façon à TU et T^*U . Les opérateurs ci-dessus correspondent via ces identifications à la différentielle et au laplacien de $U \subset \Sigma$ (en fait la métrique g_{Σ} sur U et la métrique $\text{ch}(r)^2 g_{\sigma}$ sur $U \times \{r, \theta\}$ diffèrent d'un facteur $\text{ch}(r)^2$, qui se retrouve dans l'expression de Δ_{Σ}).

Il en est de même pour ∇_{Σ} , et pour les deux opérateurs suivants. Si ω est une section de N , on pose

$$\begin{aligned} \delta_{\Sigma}(\omega) &= -\text{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\Sigma}(e_k, \omega)(e_k) \\ &= \text{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \omega(\nabla_{\Sigma}(e_k, e_k)) - e_k \cdot \omega(e_k), \end{aligned}$$

et

$$(\nabla^* \nabla)_{\Sigma} \omega = \text{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\Sigma}(\nabla_{\Sigma}(e_k, e_k), \omega) - \nabla_{\Sigma}(e_k, \nabla_{\Sigma}(e_k, \omega)),$$

qui correspondent à la codifférentielle et au laplacien de connexion pour les 1-formes de Σ .

On est maintenant armé pour le calcul explicite de $\nabla^* \nabla \eta$. En utilisant notre repère mobile, on a

$$\nabla^* \nabla \eta = -\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \eta - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \eta + \nabla_{\nabla_{e_r} e_r} \eta + \nabla_{\nabla_{e_\theta} e_\theta} \eta + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k} e_k} \eta - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \eta.$$

Comme la métrique conique est hyperbolique, on a les expressions suivantes :

$$\nabla_{e_r} e_r = 0, \quad \nabla_{e_\theta} e_\theta = -\frac{1}{\text{th}(r)} e_r, \quad \text{et} \quad \nabla_{e_k} e_k = \nabla_\Sigma(e_k, e_k) - \text{th}(r) e_r.$$

On vérifie aussi que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_r} e^r &= 0 & \nabla_{e_r} e^\theta &= 0 & \nabla_{e_r} e^j &= 0 \\ \nabla_{e_\theta} e^r &= \frac{1}{\text{th}(r)} e^\theta & \nabla_{e_\theta} e^\theta &= -\frac{1}{\text{th}(r)} e^r & \nabla_{e_\theta} e^j &= 0 \\ \nabla_{e_i} e^r &= \text{th}(r) e^i & \nabla_{e_i} e^\theta &= 0 & \nabla_{e_i} e^j &= -\text{th}(r) \delta_{ij} e^r + \nabla_\Sigma(e_i, e^j). \end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\nabla^* \nabla \eta = -\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \eta - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \eta - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \nabla_{e_r} \eta + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_\Sigma(e_k, e_k)} \eta - \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \eta.$$

En remplaçant η par $f e^r + g e^\theta + \omega$, un calcul explicite nous donne l'expression suivante pour les composantes de $\nabla^* \nabla \eta$; selon e^r :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{\text{sh}(r)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 \right) f + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} \Delta_\Sigma f \\ + \frac{2}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)^2} \delta_\Sigma \omega, \end{aligned}$$

selon e^θ :

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{1}{\text{sh}(r)^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{g}{\text{th}(r)^2} + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} \Delta_\Sigma g - \frac{2}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

et selon la composante incluse dans N :

$$-\nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \omega - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \omega - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \nabla_{e_r} \omega + \text{th}(r)^2 \omega + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \omega - 2\text{th}(r) d_\Sigma f$$

Pour pouvoir manipuler cette expression, on va effectuer dans la section suivante une sorte de décomposition en séries de Fourier généralisées.

4.2.2 Décomposition en série de Fourier généralisée

On sait qu'au voisinage du lieu singulier, la métrique g se met localement sous la forme

$$g = dr^2 + \text{sh}(r)^2 d\theta^2 + \text{ch}(r)^2 g_\Sigma.$$

Si la coordonnée θ était définie (toujours modulo l'angle conique α) sur tout un voisinage du lieu singulier, on pourrait faire des décompositions en séries de Fourier, du type

$$f(r, \theta, z) = \sum f_n(r, z) \exp(2i\pi n\theta/\alpha).$$

Mais en général la coordonnée d'angle θ n'est définie que localement, ce qui empêche d'écrire de telles décompositions. On va donc procéder à une autre sorte de décomposition ; on obtiendra finalement des écritures du type

$$f(r, \theta, z) = \sum f_n(r) \psi_n(\theta, z)$$

où les (ψ_n) forment une base hilbertienne bien choisie du bord d'un voisinage tubulaire du lieu singulier.

Une base hilbertienne adaptée

On se place maintenant au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier. Pour simplifier les notations, la notation Σ désigne ici la composante connexe en question du lieu singulier, et α l'angle conique correspondant.

Comme précédemment, on choisit un réel positif a suffisamment petit pour que le a -voisinage fermé de Σ dans M soit un voisinage tubulaire. Si r est inférieur ou égal à a , on note U_r le r -voisinage de Σ dans M et Σ_r le bord de U_r .

On va particulièrement s'intéresser à la sous-variété Σ_a . Pour pouvoir faire les décompositions voulues, on veut trouver une "bonne" base hilbertienne sur Σ_a , pour les fonctions comme pour les 1-formes, ou plus précisément pour les sections du sous-fibré N défini précédemment (pour mémoire, N est le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a , dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T_x^*M orthogonal à e^θ et e^r). Pour faciliter les calculs, on sera amené à considérer plutôt les complexifiés de ces fibrés.

Tout point x de Σ_a admet un voisinage \mathcal{V} de la forme $U \times S^1$, où U est un ouvert de Σ . Dans ce voisinage, la métrique de Σ_a , induite par celle de M , s'exprime comme une métrique produit ; plus précisément on a, dans les coordonnées adaptées,

$$g_a = \text{sh}(a)^2 d\theta^2 + \text{ch}(a)^2 g_\Sigma,$$

où la variable θ est définie modulo l'angle conique α . La variété Σ_a est donc localement un produit, avec la métrique correspondante. C'est un cas simple de submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, la base étant Σ , munie de la métrique $\text{ch}(a)^2 g_\Sigma$, et la fibre S^1 , muni de la métrique $\text{sh}(a)^2 d\theta^2$. La théorie spectrale de telles variétés a déjà été étudié, voir par exemple [3], [6]. En particulier, les laplaciens sur une telle variété se décompose en somme d'un "laplacien vertical" (ici $-\nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta}$) et d'un "laplacien horizontal" (ici $\text{ch}(a)^{-2} \Delta_\Sigma$ ou $\text{ch}(a)^{-2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma$), commutant entre eux. Le lien entre les fonctions et les 1-formes est donné par la relation de commutation suivante. La métrique sur Σ étant hyperbolique, on peut utiliser la formule de Weitzenböck (8)

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma = \Delta_\Sigma + (n-3)Id = d_\Sigma \delta_\Sigma + \delta_\Sigma d_\Sigma + (n-3)Id,$$

valable pour les sections de N . On a alors

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma \circ d_\Sigma = (\Delta_\Sigma + (n-3)Id) \circ d_\Sigma = d_\Sigma \circ (\Delta_\Sigma + (n-3)Id),$$

et donc

$$(\nabla^* \nabla)_\Sigma (d_\Sigma f) = d_\Sigma (\Delta_\Sigma f) + (n-3) d_\Sigma f. \quad (11)$$

On pose $\gamma = \frac{2\pi}{\alpha}$; cette quantité interviendra très fréquemment dans la suite. La proposition suivante se déduit directement des résultats des articles [3] et [6] cités et de la relation de commutation (11) :

Proposition 4.5. *Il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(\Sigma_a)$, telle que pour tout indice j , il existe un réel $\lambda_j \geq 0$ et un entier relatif p_j , pour lesquels*

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ e_\theta \cdot \psi_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} \psi_j. \end{cases}$$

Soit J l'ensemble des j pour lesquels $\lambda_j > 0$. Il existe une base hilbertienne $(\phi_j)_{j \in J} \cup (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(N)$, telle que :

– *pour tout indice j appartenant à J , $\phi_j = \frac{\text{ch}(a)}{(\lambda_j)^{1/2}} d_\Sigma \psi_j$, et donc*

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3) \phi_j \\ \nabla_{e_\theta} \phi_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \text{ch}(a) (\lambda_j)^{1/2} \psi_j; \end{cases}$$

– *pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, il existe un réel μ_j et un entier relatif p'_j , pour lesquels*

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \nabla_{e_\theta} \varphi_j = \frac{ip'_j \gamma}{\text{sh}(a)} \varphi_j, \end{cases}$$

et on a de plus $\delta_\Sigma \varphi_j = 0$.

On va utiliser ces résultats pour procéder à la décomposition de $\eta = fe^r + ge^\theta + \omega$ sur tout U_a .

Pour passer de Σ_a à Σ_r , on utilise le transport parallèle et le flot le long des géodésiques, intégrales du champ de vecteur e_r . Cela revient à étendre à tout U_a les fonctions ψ_j et les formes ϕ_j , φ_j , en demandant seulement que $e_r \cdot \psi_j = 0$, et que $\nabla_{e_r} \phi_j = \nabla_{e_r} \varphi_j = 0$. On note encore ψ_j , ϕ_j et φ_j ces extensions.

En procédant à de simples changement d'échelle, on montre que ces fonctions et formes étendues se comportent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \psi_j = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = ip_j \gamma \psi_j \\ \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ d_\Sigma \psi_j = \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \phi_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \phi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = ip_j \gamma \phi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3) \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \text{ch}(r) (\lambda_j)^{1/2} \psi_j, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \varphi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \varphi_j = ip'_j \gamma \varphi_j \\ (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \delta_\Sigma \varphi_j = 0 \end{cases}.$$

Pour un r fixé, on note f_r la restriction de f à Σ_r . On peut de même étendre f_r en une fonction \tilde{f}_r définie sur tout U_a en utilisant le flot du champ de vecteur e_r , c'est-à-dire en demandant seulement

que $e_r \cdot \tilde{f}_r$ soit identiquement nul (et évidemment que $\tilde{f}_r = f_r$ sur Σ_r). En particulier, on peut regarder la restriction à Σ_a de \tilde{f}_r , notée $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$. On peut maintenant utiliser les résultats de la proposition 4.5 pour décomposer $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$ sous la forme d'une série : $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a} = \sum f_r^j \psi_j$. Finalement, en réutilisant le flot pour se ramener à Σ_r , on obtient la décomposition suivante, valable sur Σ_r : $f_r = \sum f_r^j \psi_j$. En faisant cette manipulation pour tout r , et en posant $f_j(r) = f_r^j$, on obtient

$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(r) \psi_j.$$

On effectue évidemment une décomposition similaire pour la fonction g . Pour la section ω , le même procédé fonctionne, en remplaçant le flot par le transport parallèle, et on obtient une décomposition

$$\omega = \sum_{j \in J} \omega_j(r) \phi_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j.$$

On peut vérifier facilement que si η est C^∞ alors les coefficients f_j , g_j , ω_j et ϖ_j le sont aussi (en effet, $f_j(r) = \int_{\Sigma_a} \overline{\psi_j} \tilde{f}_r$ et on peut dériver sous l'intégrale ; il en est de même pour les autres coefficients).

On a finalement obtenu l'expression suivante pour η :

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(r) \psi_j e^r + \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j(r) \psi_j e^\theta \\ &+ \sum_{j \in J} \omega_j(r) \phi_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de regrouper les termes de cette décomposition de la façon suivante, faisant apparaître des "blocs élémentaires" de même fréquence :

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j \in J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta + \omega_j(r) \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned} \tag{12}$$

La norme L^2 de η sur U_a s'exprime bien dans cette décomposition : on a

$$\|\eta|_{U_a}\|^2 = \sum_j \int_0^a (|f_j|^2 + |g_j|^2 + |\omega_j|^2 + |\varpi_j|^2) \frac{\text{sh}(r)}{\text{sh}(a)} \left(\frac{\text{ch}(r)}{\text{ch}(a)} \right)^{n-2} dr.$$

Expression du laplacien dans cette décomposition

En partant de cette expression pour η , on va effectuer la même décomposition pour $\nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta$. On note toujours γ pour $\frac{2\pi}{\alpha}$.

On obtient alors, pour la composante de $\nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta$ en $\psi_j e^r$, si $j \in J$:

$$\begin{aligned} -f_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) f_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} + n-1 \right) f_j \\ + \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} g_j - \frac{2\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \omega_j, \end{aligned} \tag{13}$$

si $j \notin J$:

$$-f_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) f_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + n-1 \right) f_j + \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} g_j, \quad (14)$$

pour la composante en $\psi_j e^\theta$:

$$-g_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) g_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} + n-1 \right) g_j - \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} f_j, \quad (15)$$

pour la composante en ϕ_j :

$$-\omega_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \omega_j' + \left(\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}^2(r)} + \frac{\lambda_j + n-3}{\text{ch}(r)^2} + n-1 \right) \omega_j - \frac{2\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} f_j, \quad (16)$$

et pour la composante en φ_j :

$$-\varpi_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \varpi_j' + \left(\text{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\text{ch}(r)^2} + n-1 \right) \varpi_j. \quad (17)$$

4.2.3 Comportement des solutions de l'équation homogène au voisinage de la singularité

On va maintenant chercher à résoudre l'équation $L\eta = 0$ au voisinage de Σ . Si la 1-forme η vérifie $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier, alors par régularité elliptique η est localement C^∞ ; cela justifie la décomposition en série (12), qui converge uniformément sur tout compact du voisinage du lieu singulier.

La décomposition de $L\eta$ ci-dessus permet alors de passer d'une équation aux dérivées partielles à une infinité d'équations différentielles ordinaires. Résoudre l'équation $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier revient donc à résoudre une équation différentielle linéaire pour chaque coefficient de la décomposition. On peut ainsi étudier le comportement de chacun des termes du développement de η , et il est ensuite relativement aisé d'en déduire des propriétés du type L^2 pour η et ses dérivées au voisinage du lieu singulier.

Pour chaque indice j , l'équation (ou plutôt le système) que l'on obtient présente une singularité "régulière" en $r = 0$. On sait (voir [25], cf aussi [17]) que les solutions d'une telle équation sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $r^k f(r)$ avec f une fonction analytique, où les exposants k s'obtiennent comme racines de l'équation indiciale (en cas de racines multiples ou séparées par des entiers, il faut éventuellement rajouter des termes en $\ln r$ dans l'expression des solutions).

On pose donc, pour un entier j donné,

$$\begin{cases} f_j(r) &= r^k(f_0 + f_1 r + f_2 r^2 + \dots), \\ g_j(r) &= r^k(g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \dots), \\ \omega_j(r) &= r^k(\omega_0 + \omega_1 r + \omega_2 r^2 + \dots), \\ \varpi_j(r) &= r^k(\varpi_0 + \varpi_1 r + \varpi_2 r^2 + \dots). \end{cases}$$

A partir des expressions (13) à (17), on obtient les systèmes d'équations indicielles suivants : si $j \in J$,

$$\begin{cases} (-k^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) f_0 + 2ip_j \gamma g_0 &= 0 \\ -2ip_j \gamma f_0 + (-k^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) g_0 &= 0 \\ (-k^2 + p_j^2 \gamma^2) \omega_0 &= 0, \end{cases}$$

si $j \notin J$,

$$\begin{cases} (-k^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) f_0 + 2ip_j \gamma g_0 &= 0 \\ -2ip_j \gamma f_0 + (-k^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) g_0 &= 0, \end{cases}$$

et enfin

$$(-k^2 + p_j'^2 \gamma^2) \varpi_0 = 0.$$

Commençons par étudier le premier système, le plus compliqué. Son déterminant vaut (au signe près) $(k^2 - p_j^2 \gamma^2)(k^2 - (p_j \gamma + 1)^2)(k^2 - (p_j \gamma - 1)^2)$. Les valeurs de l'exposant k pour lesquelles le système admet des solutions non triviales (racines indicielles) sont donc $\pm p_j \gamma \pm 1$ et $\pm p_j \gamma$. Plus précisément, pour $k = \pm(p_j \gamma + 1)$, les coefficients dominants (f_0, g_0, ω_0) sont engendrés par $(1, -i, 0)$, pour $k = \pm(p_j \gamma - 1)$, par $(1, i, 0)$, et pour $k = \pm p_j \gamma$, par $(0, 0, 1)$. On remarque que l'on a toujours des racines séparées par des entiers, ce qui peut rajouter des termes logarithmiques, mais on n'aura pas à en tenir compte car seul l'exposant dominant va nous intéresser.

Le cas des racines doubles est un peu plus compliqué. Elles apparaissent si $p_j = 0$, $p_j \gamma = \pm 1$, ou $p_j \gamma = \pm \frac{1}{2}$. En fait si $p_j \gamma = \frac{1}{2}$, les solutions correspondant à $k = p_j \gamma$ et à $k = 1 - p_j \gamma$ sont linéairement indépendantes, on n'a donc pas besoin de termes logarithmiques ; même chose pour $p_j \gamma = -\frac{1}{2}$.

Pour $p_j \gamma = 1$, les solutions pour $k = p_j \gamma - 1$ et $k = -(p_j \gamma - 1)$ sont les mêmes. On a donc besoin d'un terme logarithmique. Même chose si $p_j \gamma = -1$.

Enfin, pour $p_j = 0$, il y a trois dégénérescence. Cependant pour $k = 1$ ou $k = -1$, on n'a pas de perte de dimension et donc pas besoin de termes logarithmiques. Par contre, pour $k = 0$, le terme en logarithme est nécessaire.

On remarque que les deux premiers cas de racines doubles ne se rencontrent que pour des valeurs particulières de l'angle conique. Par contre le dernier cas se rencontre quel que soit l'angle. C'est l'existence de ces solutions logarithmiques, qui sont dans L^2 mais dont la dérivée covariante ne l'est pas, qui fait que l'opérateur L n'est jamais essentiellement auto-adjoint dans notre cadre.

Les deux systèmes restant sont plus simples à étudier et ne présentent rien de nouveau par rapport à ce qui précède. La proposition suivante regroupe tous ces résultats :

Proposition 4.6. *Soit η une solution de l'équation $L\eta = 0$ sur un voisinage d'une composante connexe de Σ , d'angle conique α . Alors chacun des termes apparaissant dans la décomposition*

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j \in J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta + \omega_j(r) \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned}$$

est solution de l'équation $L\eta = 0$ au voisinage de la composante connexe du lieu singulier.

Soit j un indice appartenant à J . L'ensemble des solutions du type

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta + \omega_j(r)\phi_j$$

forme un espace vectoriel (de dimension 6). Si $p_j\gamma \notin \{-1, 0, 1\}$, alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles $v(r) = (f_j(r), g_j(r), \omega_j(r))$ est de la forme $r^k(v_0 + v_1 r + \dots)$, avec $k \in \{\pm p_j\gamma \pm 1, \pm p_j\gamma\}$. Pour $k = \pm(p_j\gamma + 1)$, on peut prendre $v_0 = (1, -i, 0)$, pour $k = \pm(p_j\gamma - 1)$, $(1, i, 0)$, et pour $k = \pm p_j\gamma$, $(0, 0, 1)$. Si $p_j\gamma = -1$, resp. 1, resp. 0, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à $k = 0$ sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme $\ln(r)(v_0 + v_1 r + \dots)$ avec $v_0 = (1, -i, 0)$, resp. $(1, i, 0)$, resp. $(0, 0, 1)$.

Maintenant si l'indice j n'appartient pas à J , l'ensemble des solutions du type

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta$$

forme un espace vectoriel (de dimension 4). Si $p_j\gamma \notin \{-1, 1\}$, alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles $v'(r) = (f_j(r), g_j(r))$ est de la forme $r^k(v'_0 + v'_1 r + \dots)$, avec $k = \pm p_j\gamma \pm 1$. Pour $k = \pm(p_j\gamma + 1)$, on peut prendre $v'_0 = (1, -i)$, et pour $k = \pm(p_j\gamma - 1)$, $v'_0 = (1, i)$. Si $p_j\gamma = -1$, resp. 1, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à $k = 0$ sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme $\ln(r)(v'_0 + v'_1 r + \dots)$ avec $v'_0 = (1, -i)$, resp. $(1, i)$.

Enfin, pour tout indice j , l'ensemble des solutions du type $\varpi_j(r)\varphi_j$ forme un espace vectoriel (de dimension 2). Si $p'_j \neq 0$, alors on dispose d'une base constituée de deux solutions élémentaires pour lesquelles $\varpi_j(r) = r^k(1 + \varpi_1 r + \dots)$, avec $k = \pm p_j\gamma$. Si $p' = 0$ les deux solutions élémentaires ci-dessus sont identiques, il faut donc rajouter une solution pour laquelle $\varpi_j(r) = \ln(r)(1 + \varpi_1 r + \dots)$.

Dans la suite, on supposera toujours que p_j et p'_j sont **positifs**; en effet une simple conjugaison permet de passer de p_j à $-p_j$.

4.3 Cas des angles coniques inférieurs à 2π

Dans cette sous-section, **tous les angles coniques seront supposés strictement inférieurs à 2π** . En particulier, si p est un entier, alors soit $p\gamma = 0$, soit $|p\gamma| > 1$.

On va étudier maintenant quels sont les exposants dominants possibles pour une solution de l'équation $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier, en fonction des différentes conditions imposées à η .

Le premier résultat est le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Soit η une 1-forme telle que $L\eta$ soit égal à 0 au voisinage du lieu singulier et que η et $\nabla\eta$ soient dans L^2 . Alors $\nabla d\eta$ est dans L^2 .*

Démonstration. Commençons par montrer que $\nabla^*\nabla d\eta$ est dans L^2 . Pour cela on utilise la formule de Weitzenböck suivante, valable pour une métrique hyperbolique, qui est un analogue de la formule (8) pour les 1-formes que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises (voir [2] §1.I) :

$$\forall \omega \in \Omega^2 M, \nabla^*\nabla \omega = \Delta \omega + 2(n-2)\omega.$$

En particulier,

$$\nabla^*\nabla d\eta = \Delta d\eta + 2(n-2)d\eta = d\Delta\eta + 2(n-2)\eta = d(L\eta) - 2d\eta.$$

Au voisinage du lieu singulier, on a alors $\nabla^* \nabla d\eta = -2d\eta$, et donc $\nabla^* \nabla d\eta$ est dans L^2 .

D'après la proposition 3.8, comme $d\eta$ et $\nabla^* \nabla d\eta$ sont L^2 , il suffit juste de montrer que $\nabla_{e_r} d\eta$ est dans L^2 pour prouver que $\nabla d\eta$ est dans L^2 .

Pour cela, on regarde comment les conditions $\eta \in L^2$, $\nabla \eta \in L^2$ se traduisent sur la développement de η . On choisit un réel a suffisamment petit pour que $L\eta$ soit nul sur U_a ; c'est ce a que l'on utilise pour la décomposition de η (voir proposition 4.5). On écrit alors

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{j \in J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta + \omega_j(r) \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(f_j(r) \psi_j e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \varpi_j(r) \varphi_j. \end{aligned}$$

La norme L^2 de η sur U_a est donnée par

$$\|\eta|_{U_a}\|^2 = \sum_j \int_0^a (|f_j|^2 + |g_j|^2 + |\omega_j|^2 + |\varpi_j|^2) \frac{\text{sh}(r)}{\text{sh}(a)} \left(\frac{\text{ch}(r)}{\text{ch}(a)} \right)^{n-2} dr.$$

Comme $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier, les fonctions f_j, g_j etc. sont équivalentes à $c r^{k_j}$ (ou $c r^{k_j} \ln(r)$) quand r tend vers 0. Pour que la quantité ci-dessus soit finie, tous les exposants dominants apparaissant dans la décomposition de η (donné par la proposition 4.6) doivent être strictement plus grand que -1 . Or on a vu que k est de la forme $\pm p_j \gamma \pm 1$ ou $\pm p_j \gamma$, où p_j est un entier que l'on peut supposer positif, et γ vaut 2π divisé par l'angle conique de la composante connexe du lieu singulier. Par conséquent le fait que η soit dans L^2 élimine d'emblée les solutions avec $k = -p_j \gamma - 1$, avec $k = -p_j \gamma$ pour $p_j \neq 0$, et avec $k = -p_j \gamma + 1$ pour $p_j > 1$ (et aussi $p_j = 1$ si $\gamma \geq 2$, c'est-à-dire si l'angle conique est inférieur ou égal à π).

Le fait que $\nabla \eta$ soit dans L^2 impose aussi des conditions sur les exposants possibles. A partir de la décomposition ci-dessus de η , on obtient l'écriture suivante pour $\nabla \eta$:

$$\begin{aligned} \nabla \eta &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(f'_j \psi_j e^r \otimes e^r + g'_j \psi_j e^r \otimes e^\theta + \left(\frac{i p_j \gamma}{\text{sh}(r)} f_j - \frac{1}{\text{th}(r)} g_j \right) \psi_j e^\theta \otimes e^r \right. \\ &+ \left(\frac{1}{\text{th}(r)} f_j + \frac{i p_j \gamma}{\text{sh}(r)} g_j \right) \psi_j e^\theta \otimes e^\theta + f_j \text{th}(r) \psi_j \text{ch}(r)^2 g_\Sigma \Big) \\ &+ \sum_{j \in J} \left(\omega'_j e^r \otimes \phi_j + \frac{i p_j \gamma}{\text{sh}(r)} \omega_j e^\theta \otimes \phi_j + \left(\frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} f_j - \text{th}(r) \omega_j \right) \phi_j \otimes e^r + \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} g_j \phi_j \otimes e^\theta \right. \\ &+ \left. \omega_j \delta_\Sigma^* \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\varpi'_j e^r \otimes \varphi_j + \frac{i p'_j \gamma}{\text{sh}(r)} \varpi_j e^\theta \otimes \varphi_j - \text{th}(r) \varpi_j \varphi_j \otimes e^r + \varpi_j \nabla_\Sigma \phi_j \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Chacun des termes de cette expression doit être L^2 ; de la même façon que ci-dessus, cela impose que tous les exposants k apparaissant dans la décomposition de η (donné par la proposition 4.6) doivent être supérieurs ou égaux à 0, et qu'il n'y ait pas de termes logarithmiques. Comme les angles coniques sont supposés inférieurs à 2π , cela revient à dire que les fonctions f_j, g_j , etc. sont des combinaisons

linéaires des seules solutions élémentaires définies à la section précédente pour lesquelles l'exposant k vaut 0, 1, $p_j\gamma - 1$, $p_j\gamma$, $p'_j\gamma$ ou $p_j\gamma + 1$.

Regardons maintenant $\nabla_{e_r} d\eta \in L^2$. De la décomposition en série (18) on déduit facilement l'écriture suivante de $d\eta$:

$$\begin{aligned} d\eta &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(g'_j + \frac{1}{\text{th}(r)} g_j - \frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)} f_j \right) \psi_j e^r \wedge e^\theta \\ &+ \sum_{j \in J} \left(\left(\omega'_j + \text{th}(r)\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} f_j \right) e^r \wedge \phi_j + \left(\frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)} \omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} g_j \right) e^\theta \wedge \phi_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\left(\varpi'_j + \text{th}(r)\varpi_j \right) e^r \wedge \varphi_j + \frac{ip'_j\gamma}{\text{sh}(r)} \varpi_j e^\theta \wedge \varphi_j + \varpi_j \partial_\Sigma \phi_j \right). \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à e_r , on aboutit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_r} d\eta &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(g''_j + \frac{1}{\text{th}(r)} g'_j + \left(1 - \frac{1}{\text{th}(r)^2}\right) g_j - \frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)} f'_j + \frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} f_j \right) \psi_j e^r \wedge e^\theta \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\omega''_j + \text{th}(r)\omega'_j + (1 - \text{th}(r)^2)\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} f'_j + \frac{(\lambda_j)^{1/2}\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} f_j \right) e^r \wedge \phi_j \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(\frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)} \omega'_j - \frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} g'_j + \frac{(\lambda_j)^{1/2}\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} g_j \right) e^\theta \wedge \phi_j \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \left((\varpi''_j + \text{th}(r)\varpi'_j + (1 - \text{th}(r)^2)\varpi_j) e^r \wedge \varphi_j \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{ip'_j\gamma}{\text{sh}(r)} \varpi'_j - \frac{ip'_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \varpi_j \right) e^\theta \wedge \varphi_j + (\varpi'_j - \text{th}(r)\varpi_j) d_\Sigma \varphi_j \right) \end{aligned}$$

Dans cette somme, seules des combinaisons de solutions élémentaires dont les exposants dominants sont positifs apparaissent. Un simple calcul montre alors que tous les termes de cette série sont d'exposant supérieur à -1 , et donc appartiennent L^2 . Il reste cependant à vérifier que la série converge en norme L^2 .

Une méthode pour cela est d'utiliser les résultats très généraux de la théorie des "opérateurs d'arêtes" ou opérateurs sur des variétés à bord dégénéré, dont L est un exemple typique. L'article [17] traite en particulier des opérateurs elliptiques, qui est le cas qui nous intéresse ici.

Une autre méthode consiste à majorer directement les termes apparaissant dans la série, en utilisant les majorations des solutions élémentaires d'exposant positif données dans [18]. Comme l'opérateur L est elliptique, la 1-forme η est C^∞ au voisinage du lieu singulier. En particulier, comme Σ_a est compacte, toutes les dérivées de η sont de norme L^2 finie sur Σ_a . On en déduit que pour tout polynôme (ou fonction majorée par un polynôme) à deux variables P , la série

$$\sum_{j,k} |P(p_j\gamma, \lambda_j) f_j(a)|^2$$

converge, et qu'il en est de même en remplaçant $f_j(a)$ par $g_j(a)$, $\omega_j(a)$ ou $\varpi_j(a)$. Ce résultat, combiné aux estimations de [18], lemme 2.1.3, montre directement que la série donnant l'expression de $\nabla_{e_r} d\eta$ converge en norme L^2 sur U_a .

Récapitulons : si η est une solution de l'équation $L\eta = 0$ au voisinage de Σ , telle que η et $\nabla\eta$ soient dans L^2 , on a vu que seuls les solutions élémentaires ayant un exposant dominant supérieur

ou égal à 0 apparaissent dans la décomposition de η . Par conséquent les termes apparaissant dans la décomposition de $\nabla d\eta$ ont tous des exposants dominants strictement supérieurs à -1 . Ce fait, et le caractère C^∞ de η près du lieu singulier, suffit à prouver que $\nabla d\eta$ est dans L^2 . \square

A partir de ce lemme, on va pouvoir passer de l'étude des solutions de l'équation $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier à celle des solutions de l'équation $L\eta = f$ sur M entière. Le théorème suivant montre que quand les angles coniques sont inférieurs à 2π , on peut contrôler le comportement de certaines combinaisons des dérivées premières et secondes des solutions de l'équation de normalisation ; ce contrôle sera en fait suffisant pour démontrer la rigidité infinitésimale.

Théorème 4.8. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Soit ϕ une section de $L^2(T^*M)$. Alors il existe une unique section η de $L^2(T^*M)$, solution de l'équation $L\eta = \phi$, telle que η , $\nabla\eta$, $d\delta\eta$, et $\nabla d\eta$ (au sens des distributions) soient dans L^2 .*

Démonstration. On sait depuis le début de la section 4.2 (p. 22) que l'on peut résoudre de façon unique l'équation $L\eta = \phi$ avec η , $\nabla\eta$ et $\nabla^*\nabla\eta$ dans L^2 . Le seul point qui reste à montrer est que $\nabla d\eta$ est aussi L^2 ; en effet, si $\nabla d\eta$ est dans L^2 , alors automatiquement $\delta d\eta$ est dans L^2 , et donc c'est aussi le cas pour $d\delta\eta = \nabla^*\nabla\eta - \delta d\eta - (n-1)\eta$, voir la formule de Weitzenböck (8).

Les formes C^∞ à support compact étant dense dans L^2 , on peut trouver une suite (ϕ_k) de 1-formes C^∞ à support compact telle que $\phi_k \rightarrow \phi$ dans L^2 quand $k \rightarrow \infty$. Soit (η_k) la suite d'éléments de D telle que pour tout entier k , $L\eta_k = \phi_k$. On applique alors le théorème 3.2 (avec, à un facteur près, $A = \nabla$ et $A^* = \nabla^*$) : les transformations $(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$ et $\nabla(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$ sont continues, donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_k) = (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi) = \eta$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla\eta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_k)) = \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi)) = \nabla\eta,$$

les limites étant au sens L^2 . Comme $d\eta_k$ est la partie antisymétrique de $\nabla\eta_k$, la suite $(d\eta_k)$ est aussi convergente, avec $\lim_{k \rightarrow \infty} d\eta_k = d\eta$. Maintenant, comme ϕ_k est à support compact, $L\eta_k$ est identiquement nul au voisinage du lieu singulier, et η_k rentre donc dans le cadre de la proposition 4.6. Comme η_k appartient à $D(=D')$, η_k ainsi que $d\eta_k$ sont dans L^2 , et on a vu au lemme 4.7 qu'alors $\nabla d\eta_k \in L^2$. On va maintenant montrer que $(\nabla d\eta_k)$, suite de sections du fibré $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, est bornée dans L^2 .

Pour cela, on considère ξ , section C^∞ à support compact de $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ ("section test"), et on s'intéresse au produit scalaire $\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle$. Le but est d'arriver à montrer que

$$|\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle| \leq M \|\xi\|,$$

où M ne dépend pas de k ni de ξ .

La restriction de la dérivée covariante à $\Omega^2 M$ nous donne un opérateur (non borné) $\nabla : L^2(\Lambda^2 M) \rightarrow L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$; son adjoint est la restriction de ∇^* à $L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$, et les résultats de la section 3 s'appliquent. Maintenant, en utilisant la définition de l'adjoint d'un opérateur, on a l'égalité $\ker \nabla^* = (\text{Im } \nabla)^\perp$. Le théorème 3.9 nous garantit que l'image de ∇ est fermée, et on a donc la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M) = \ker \nabla^* \oplus \text{Im } \nabla.$$

On peut donc écrire $\xi = k + \nabla\zeta$ dans cette décomposition, et d'après le corollaire 3.10 on peut même choisir ζ de telle sorte que

$$\|\zeta\| \leq c \|\nabla\zeta\| \leq c \|\xi\|$$

pour une constante c donnée ne dépendant pas de ξ .

Retournons au produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle &= \langle \nabla d\eta_k, \nabla \zeta + k \rangle \\ &= \langle \nabla d\eta_k, \nabla \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Pour pouvoir faire une intégration par parties, il faut vérifier que tous les termes impliqués sont L^2 . On sait déjà que ζ , $\nabla \zeta$, $\nabla d\eta_k$ le sont, reste à montrer que c'est aussi le cas de $\nabla^* \nabla d\eta_k$. Pour cela on utilise la formule de Weitzenböck suivante, valable pour une métrique hyperbolique, qui est un analogue de la formule pour les 1-formes que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises (voir [2] §1.I) :

$$\forall \omega \in \Omega^2 M, \quad \nabla^* \nabla \omega = \Delta \omega + 2(n-2)\omega. \quad (19)$$

En l'appliquant à η_k , on trouve

$$\nabla^* \nabla d\eta_k = \Delta d\eta_k + 2(n-2)d\eta_k = d\Delta \eta_k + 2(n-2)d\eta_k,$$

car d et $\Delta = d\delta + \delta d$ commutent. D'autre part

$$\Delta \eta_k = L\eta_k - 2(n-1)\eta_k = \phi_k - 2(n-1)\eta_k.$$

Finalement,

$$\nabla^* \nabla d\eta_k = d\phi_k - 2d\eta_k.$$

Comme ϕ_k est à support compact et que $\eta_k \in D$, les formes $d\phi_k$ et $d\eta_k$ sont L^2 , donc $\nabla^* \nabla d\eta_k$ est L^2 , donc on peut donc intégrer par parties (théorème 3.5) :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle &= \langle \nabla d\eta_k, \nabla \zeta \rangle \\ &= \langle \nabla^* \nabla d\eta_k, \zeta \rangle \\ &= \langle d\phi_k - 2d\eta_k, \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Comme $\nabla \zeta$ est L^2 , $\delta \zeta = -\text{tr}_g \nabla \zeta$ est aussi L^2 , on a même $\|\delta \zeta\| \leq \sqrt{n} \|\nabla \zeta\|$. D'autre part ϕ_k , $d\phi_k$ et ζ sont L^2 , on peut encore intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle &= \langle d\phi_k - 2d\eta_k, \zeta \rangle \\ &= \langle \phi_k, \delta \zeta \rangle - 2\langle d\eta_k, \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Pour finir on majore avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle| &\leq \|\phi_k\| \|\delta \zeta\| + 2\|d\eta_k\| \|\zeta\| \\ &\leq (\sqrt{n}\|\phi_k\| + 2c\|d\eta_k\|) \|\nabla \zeta\| \\ &\leq M\|\xi\|\end{aligned}$$

car les suites (ϕ_k) et $(d\eta_k)$ sont convergentes, donc bornées, dans L^2 . Cette majoration, valable pour toute section test ξ , implique directement que la suite $(\nabla d\eta_k)$ est bornée dans L^2 .

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite, encore notée $(\nabla d\eta_k)$, qui converge faiblement vers une limite $l \in L^2$: c'est-à-dire que quel que soit $\xi \in L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle = \langle l, \xi \rangle.$$

Mais alors, si ξ est C^∞ à support compact,

$$\langle \nabla d\eta_k, \xi \rangle = \langle d\eta_k, \nabla^* \xi \rangle,$$

et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle d\eta_k, \nabla^* \xi \rangle = \langle d\eta, \nabla^* \xi \rangle$$

car $(d\eta_k)$ converge dans L^2 vers $d\eta$. Par conséquent, on a

$$\langle d\eta, \nabla^* \xi \rangle = \langle l, \xi \rangle$$

pour tout $\xi \in C_0^\infty$, ce qui signifie exactement que

$$l = \nabla_{\max} d\eta = \nabla d\eta,$$

et par suite $\nabla d\eta$ appartient à L^2 . □

Notons que si en plus ϕ est C^∞ , alors par régularité elliptique la solution η ci-dessus est aussi de classe C^∞ .

4.4 Cas des angles coniques inférieurs à π

Si on suppose que tous les angles coniques sont inférieurs à π , il est alors possible d'avoir un meilleur contrôle sur le comportement des solutions de l'équation de normalisation $L\eta = \phi$, où $\phi \in L^2$. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 4.9. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π . Alors l'opérateur*

$$L = \nabla^* \nabla + (n-1)Id : L^{2,2}(T^*M) \rightarrow L^2(T^*M)$$

est un isomorphisme.

On retrouve donc quand les angles sont suffisamment petits une propriété toujours valable sur une variété compacte. Une application immédiate est que si l'on part d'une déformation infinitésimale $L^{1,2}$, par exemple préservant les angles, alors la déformation normalisée correspondante sera aussi dans $L^{1,2}$.

La démonstration est en fait complètement analogue à celle du théorème 4.8 ; on ne redonnera donc pas tous les détails. Elle repose elle aussi sur un lemme :

Lemme 4.10. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π . Soit η une 1-forme telle que $L\eta$ soit égal à 0 au voisinage du lieu singulier et que η et $\nabla\eta$ soient dans L^2 . Alors $\nabla\nabla\eta$ appartient à L^2 .*

Démonstration du lemme. La preuve est en tout point similaire à celle du lemme 4.7. Comme on sait déjà que $\nabla d\eta$ est dans L^2 , il suffit de le montrer pour $\nabla\delta^*\eta$. D'après la proposition 3.8, on a juste à montrer que $\nabla^*\nabla(\delta^*\eta)$ et $\nabla_{e_r}\delta^*\eta$ sont dans L^2 .

Pour $\nabla^*\nabla(\delta^*\eta)$, cela résulte d'une relation de commutation entre $\nabla^*\nabla$ et δ^* . Soit σ une 1-forme (lisse) sur M . On sait que la déformation $\delta^*\sigma$ est triviale, c'est-à-dire que l'on a toujours $E'(\delta^*\sigma) = 0$, soit

$$\nabla^*\nabla(\delta^*\sigma) - 2\mathring{R}(\delta^*\sigma) - 2\delta^*\beta\delta^*\sigma = 0,$$

voir (1). La métrique étant hyperbolique, on peut utiliser les relations (2) et (9) pour simplifier cette expression. On obtient alors la relation suivante :

$$\nabla^* \nabla (\delta^* \sigma) = 2\delta^* \sigma + 2(\delta \sigma)g + \delta^* (\nabla^* \nabla \sigma + (n-1)\sigma). \quad (20)$$

En appliquant cette formule à η , on obtient au voisinage du lieu singulier

$$\nabla^* \nabla (\delta^* \eta) = 2\delta^* \eta + 2(\delta \eta)g$$

car $L\eta = \nabla^* \nabla \eta + (n-1)\eta = 0$ près du lieu singulier. Comme η est $L^{1,2}$, on vérifie facilement que le terme de droite, et donc $\nabla^* \nabla \delta^* \eta$, appartiennent à $L^2(S^2 M)$.

Pour montrer que $\nabla_{e_r} \delta^* \eta$ est dans L^2 , l'idée est la suivante. Le fait que η appartient à $L^{1,2}$ impose que seules les solutions élémentaires d'exposant dominant positif apparaissent dans la décomposition de η donnée par la proposition 4.6. Et comme tous les angles coniques sont supposés plus petits que π , les exposants dominants positifs sont soit nuls, soit plus grands que 1. Cela donne suffisamment de contrôle sur les solutions élémentaires pour montrer que tous les termes apparaissant dans la décomposition de $\nabla \nabla \eta$ sont dans L^2 . On utilise ensuite le fait que P est elliptique, donc que u est C^∞ près du lieu singulier, pour assurer comme dans la preuve du lemme 4.7 la convergence en norme L^2 de la décomposition en série sur un voisinage du lieu singulier de $\nabla_{e_r} \delta^* \eta$, à l'aide des résultats de [17] ou de [18]. \square

Pour passer de $L\eta = 0$ au voisinage du lieu singulier à $L\eta = \phi$ sur M , l'idée est encore de prendre une suite de 1-formes ϕ_k , C^∞ à support compact, convergeant vers ϕ en norme L^2 . On prend alors une suite η_k telle que $L\eta_k = \phi_k$ et $\eta_k \in L^{1,2}$. On sait déjà que η_k et $\nabla \eta_k$ convergent en norme L^2 vers η et $\nabla \eta$ respectivement, et que $\nabla d\eta_k$ converge faiblement vers $\nabla d\eta \in L^2$. Il ne reste plus qu'à considérer $\nabla \delta^* \eta_k$. Pour montrer que cette suite est bornée, on regarde encore le produit scalaire contre une section test (i.e. C^∞ à support compact) ξ de $T^* M \otimes S^2 M$. Grâce à plusieurs intégrations par partie et à la relation de commutation (20), on aboutit à l'existence d'une constante M telle que $|\langle \nabla \delta^* \eta_k, \xi \rangle| \leq M \|\xi\|$ pour toute section test ξ , ce qui justifie que la suite $\nabla \delta^* \eta_k$ est bornée. On finit en montrant qu'elle converge faiblement vers une limite, qui est alors égale à $\nabla \delta^* \eta$, ce qui termine de démontrer que $\nabla \delta^* \eta \in L^2$.

Remarque : Bien qu'on ne le montre pas ici, il est intéressant de noter que les théorèmes 4.8 et 4.9 cessent d'être vrai dès qu'un angle conique est plus grand que respectivement 2π ou π . Il devient alors beaucoup plus difficile de trouver un "bon" domaine pour résoudre l'équation de normalisation, cf [14] et [7] pour des résultats dans cette direction.

5 Déformations Einstein infinitésimales

5.1 Rigidité infinitésimale des cône-variétés

Nous avons maintenant en main tous les outils pour montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Soit h_0 une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E'_g(h_0) = 0$) telle que h_0 et ∇h_0 soient dans L^2 . Alors la déformation h_0 est triviale, i.e. il existe une forme $\eta \in \Omega^1 M$ telle que $h_0 = \delta^* \eta$.*

Dans toute cette sous-section on supposera donc que les angles coniques sont toujours inférieurs à 2π .

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à normaliser h_0 , c'est-à-dire à chercher η tel que $h = h_0 - \delta^*\eta$ vérifie la condition de jauge $\beta(h) = 0$, ce qui revient à résoudre l'équation $\beta \circ \delta^*u = \beta h_0$. Comme ∇h_0 est dans L^2 , βh_0 l'est aussi, et d'après le théorème 4.8 cette équation admet une unique solution η telle que η , $\nabla \eta$, $d\delta\eta$ et $\nabla d\eta$ soient dans L^2 . On pose $h = h_0 - \delta^*\eta$. Notons que l'on a perdu des informations en normalisant : en effet, rien ne garantit que la déformation normalisée h vérifie encore $\nabla h \in L^2$, puisqu'on ne connaît rien pour l'instant sur $\nabla \delta^*\eta$.

La déformation h vérifie alors :

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h = 0 \\ \delta h + d\text{tr } h = 0 \end{cases}$$

En prenant la trace par rapport à g de la première équation, on obtient

$$\Delta(\text{tr } h) + 2(n-1)\text{tr } h = 0,$$

ce qui incite à intégrer par parties, mais pour le faire il faut d'abord vérifier que les termes impliqués sont L^2 , avant de pouvoir appliquer le théorème 3.4. Comme h_0 et $\delta^*\eta$ sont L^2 , h est bien L^2 , donc $\text{tr } h$ aussi, et donc $\Delta \text{tr } h$ aussi. Maintenant,

$$d\text{tr } h = d\text{tr } h_0 + d\text{tr } \delta^*\eta = d\text{tr } h_0 - d\delta\eta,$$

donc $d\text{tr } h$ est L^2 ($d\text{tr } h_0$ est L^2 car ∇h_0 l'est). Par suite, on trouve en intégrant contre $\text{tr } h$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \text{tr } h, \Delta(\text{tr } h) + 2(n-1)\text{tr } h \rangle \\ &= \|d\text{tr } h\|^2 + 2(n-1)\|\text{tr } h\|^2 \end{aligned}$$

et donc $\text{tr } h = 0$, ce qui, avec $\beta(h) = 0$, implique aussi $\delta h = 0$. Finalement, on a

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \text{tr } h = 0 \end{cases}$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à utiliser une autre formule de Weitzenböck (cf [2], §12.69). Un 2-tenseur peut toujours se voir comme une 1-forme à valeur dans le fibré cotangent T^*M . Ce fibré étant muni de la connexion de Levi-Civita ∇ , on note d^∇ la différentielle extérieure associée sur les formes à valeurs dans T^*M . L'opérateur adjoint est la codifférentielle notée δ^∇ . Notons que si u est une 0-forme à valeurs dans T^*M (c'est-à-dire une 1-forme usuelle), alors $d^\nabla u = \nabla u$; de même pour une 1-forme à valeurs dans T^*M , $\delta^\nabla h = \nabla^* h$. On a alors la formule suivante, valable pour tout 2-tenseur symétrique :

$$\nabla^* \nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + \mathring{R}h - h \circ \text{ric}. \quad (21)$$

Pour une métrique hyperbolique, cela se simplifie en

$$\nabla^* \nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + nh - (\text{tr } h)g.$$

En combinant avec ce qui précède, on obtient

$$\begin{cases} \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \text{tr } h = 0 \end{cases}$$

Pour conclure, "il suffit" d'une intégration par parties contre h . Comme h est dans L^2 , $\delta^\nabla d^\nabla h$ est aussi dans L^2 ; si ∇h , ou même seulement $\nabla_{e_r} h$, était L^2 on pourrait conclure en utilisant une méthode

analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 3.5. Malheureusement on ne sait rien sur le caractère L^2 ou non de $\nabla\delta^*\eta$. On va donc devoir contourner cette difficulté pour montrer qu'on a bien $\langle\delta^\nabla d^\nabla h, h\rangle = \|d^\nabla h\|^2$.

Avant toutes choses, il faut montrer que $d^\nabla h$ est bien L^2 . Comme ∇h_0 est L^2 , $d^\nabla h_0$ est L^2 ; il ne reste qu'à regarder $d^\nabla\delta^*\eta$. Or

$$\delta^*\eta = \nabla\eta - \frac{1}{2}d\eta = d^\nabla\eta - \frac{1}{2}d\eta,$$

donc

$$d^\nabla\delta^*\eta = (d^\nabla)^2\eta - \frac{1}{2}d^\nabla d\eta.$$

L'opérateur $(d^\nabla)^2$ est bien connu, ce n'est rien d'autre que l'opposé de la courbure, i.e.

$$(d^\nabla)^2\eta(x, y) = -R(x, y)\eta = \nabla_x\nabla_y\eta - \nabla_y\nabla_x\eta - \nabla_{[x, y]}\eta.$$

C'est un opérateur borné, c'est-à-dire continu, pour les normes L^2 ; par conséquent $(d^\nabla)^2\eta$ est L^2 . Il ne nous reste donc que la terme $d^\nabla d\eta$; or le théorème 4.8 nous garantit que $\nabla d\eta$, et donc $d^\nabla d\eta$, sont bien L^2 .

Le tenseur $d^\nabla h$ est donc bien dans L^2 . Malheureusement, on n'a pas d'analogue du résultat de Cheeger (théorème 3.4) pour les formes à valeurs dans un fibré, du fait que $d^\nabla \circ d^\nabla$ ne s'annule pas nécessairement, à la différence de $d \circ d$. Cependant, en écrivant

$$h = h_0 - \delta^*\eta = h_0 + \frac{1}{2}d\eta - d^\nabla\eta,$$

on a

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle h_0 + \frac{1}{2}d\eta, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle - \langle d^\nabla\eta, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle. \quad (22)$$

Le théorème 4.8 nous assure que $\nabla(h_0 + \frac{1}{2}d\eta)$ est dans L^2 . Ceci nous permet de montrer, exactement de la même façon que dans la démonstration du théorème 3.5, qu'on a bien

$$\langle h_0 + \frac{1}{2}d\eta, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla(h_0 + \frac{1}{2}d\eta), d^\nabla h \rangle. \quad (23)$$

Pour le terme qui reste, comme η et $\nabla\eta$ sont L^2 , on peut trouver d'après le corollaire 3.7 une suite (η_k) , C^∞ à support compact, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \eta$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla\eta_k = \nabla\eta$. On a alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle d^\nabla\eta_k, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla\eta, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle.$$

On peut faire l'intégration par parties avec η_k :

$$\langle d^\nabla\eta_k, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2\eta_k, d^\nabla h \rangle.$$

Mais comme $(d^\nabla)^2$ est continue, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (d^\nabla)^2\eta_k = (d^\nabla)^2\eta,$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle (d^\nabla)^2\eta_k, d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2\eta, d^\nabla h \rangle.$$

On en déduit que

$$\langle d^\nabla\eta, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2\eta, d^\nabla h \rangle,$$

et avec (22) et (23) on a établi l'égalité

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \|d^\nabla h\|^2.$$

Par conséquent, comme $\delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h \rangle \\ &= \|d^\nabla h\|^2 + (n-2)\|h\|^2 \end{aligned}$$

et donc le tenseur h est identiquement nul. Par suite $h_0 = \delta^* \eta$, la déformation est triviale. \square

Corollaire 5.2 (Rigidité infinitésimale). *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π . Alors M est infinitésimalement rigide parmi les cônes-variétés Einstein à angles coniques fixés.*

Démonstration. En effet, on a vu que toute déformation infinitésimale de la structure de cône-variété préservant les angles pouvait se mettre sous la forme d'un 2-tenseur symétrique h_0 appartenant à L^2 , dont la dérivée covariante ∇h_0 est aussi dans L^2 . On peut alors appliquer le théorème ci-dessus pour montrer que toutes les déformations Einstein de ce type sont triviales. \square

5.2 Constructions de déformations Einstein modifiant les angles

On vient de voir que sur une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à 2π , les déformations Einstein infinitésimales préservant les angles étaient triviales. A l'inverse, on va maintenant s'intéresser aux déformations Einstein infinitésimales réalisant (au premier ordre) une variation donnée des angles coniques. Pour cela, on aura besoin du théorème 4.9 ; en conséquence on se restreindra au cas où les angles coniques sont tous inférieurs à π . On aura aussi besoin du théorème 4.1, ou plutôt de sa variante donnée par la proposition 4.4, et dont la démonstration suit :

Théorème (4.1, 4.4). *Si M est une cône-variété hyperbolique, alors les extensions minimales et maximales des opérateurs β et δ^* sont égales : $\beta_{\max} = \beta_{\min}$, $\delta_{\max}^* = \delta_{\min}^*$. On note ces opérateurs simplement β et δ^* . On a alors la décomposition en somme directe $L^2(S^2M) = \ker \beta \oplus \operatorname{Im} \delta^*$.*

Démonstration. Le seul point laissé de côté à la section 4.1 est l'égalité des extensions minimales et maximales dans le cas où la métrique est hyperbolique. Prenons $\eta \in D(\delta_{\max}^*)$. D'après le théorème 4.1, il existe $k \in \ker \beta_{\max}$ et $\eta' \in D(\delta_{\min}^*)$ tels que $\delta_{\max}^* \eta = k + \delta_{\min}^* \eta' = k$. La section $u = \eta - \eta'$ vérifie $\beta_{\max}(\delta_{\max}^*(u)) = 0$, et donc (au sens des distributions)

$$\nabla^* \nabla u + (n-1)u = 0.$$

La section u admet alors un développement du type donné à la proposition 4.6. Le fait que u et $\delta_{\max}^* u$ soient dans L^2 impose que seuls les termes ayant un exposant dominant supérieur ou égal à 0 apparaissent dans cette décomposition. On peut alors appliquer le raisonnement utilisé dans les preuves des lemmes 4.7 et 4.10 pour montrer que ∇u est dans L^2 , et donc que u appartient à $L^{1,2}$. Or le noyau de $\nabla^* \nabla + (n-1)Id$ dans $L^{1,2}$ est réduit à $\{0\}$; par conséquent $u = 0$, et $\eta = \eta'$ appartient à $D(\delta_{\min}^*)$. Cela montre que $D(\delta_{\max}^*) = D(\delta_{\min}^*)$, et donc que $\delta_{\max}^* = \delta_{\min}^*$.

D'autre part on a vu (proposition 4.2 et la remarque p.19) que $D(\beta_{\min}^t) = D(\delta_{\min}^*)$ et que $D(\beta_{\max}^t) = D(\delta_{\max}^*)$. Alors $D(\beta_{\min}^t) = D(\beta_{\max}^t)$, soit $\beta_{\min}^t = \beta_{\max}^t$. En passant à l'adjoint, on trouve directement que $\beta_{\max} = \beta_{\min}$. \square

Le principe de construction d'une déformation infinitésimale Einstein est assez simple. On part d'une déformation infinitésimale (non Einstein) h_0 réalisant la variation voulue des angles coniques, et

on cherche à la “corriger” par un 2-tenseur symétrique h dans $L^{1,2}$ (donc ne modifiant pas les angles coniques), de telle sorte que la nouvelle déformation $h_0 - h$ soit Einstein, c’est-à-dire que $E'(h_0 - h) = 0$. Cela revient donc à résoudre l’équation

$$E'(h) = E'(h_0),$$

avec h dans $L^{1,2}$. Le problème est qu’il sagit d’une “mauvaise” équation : l’opérateur Einstein linéarisé $E' = \nabla^* \nabla - 2\mathring{R} - 2\delta^* \circ \beta$ est fortement dégénéré, au sens où son noyau, qui contient l’espace des déformations triviales $\text{Im } \delta^*$, est de dimension infini. L’idée est alors de chercher à résoudre à la place le système suivant :

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h = E'(h_0) \\ \beta(h) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

L’opérateur $P = \nabla^* \nabla - 2\mathring{R}$ est nettement plus sympathique : il est elliptique, symétrique, coercif, non dégénéré. En particulier, on peut montrer sans trop de difficultés que pour toute section ϕ de $L^2(S^2M)$, il existe un unique h dans $L^{1,2}(S^2M)$ tel que $Ph = \phi$. Pour pouvoir résoudre le système (24), on va considérer la restriction de P au sous-espace vectoriel fermé $\ker \beta$, dont les propriétés qui nous intéressent sont données par la proposition suivante :

Proposition 5.3. *Soit $D(P) = \{h \in \ker \beta \mid \nabla h \in L^2 \text{ et } \nabla^* \nabla h \in L^2\}$. L’opérateur*

$$\begin{aligned} P : D(P) \subset \ker \beta &\rightarrow \ker \beta \\ h &\mapsto \nabla^* \nabla h - 2h + 2(\text{tr } h)g \end{aligned}$$

est auto-adjoint et positif, et donc inversible.

Démonstration. Vérifions avant toute autre chose que l’image de P est bien incluse dans $\ker \beta$. On sait que pour toute section lisse h de S^2M ,

$$\beta(E'(h)) = \beta(\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h - 2\delta^* \beta h) = 0. \quad (25)$$

Donc $\beta(\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h) = 2\beta\delta^* \beta h$, et si $\beta h = 0$, on a immédiatement $\beta(\nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h) = 0$. On va montrer que c’est aussi le cas (au moins au sens des distributions) si h appartient à $D(P)$.

Soit ξ une section test de S^2M , C^∞ à support compact, et h un élément de $D(P)$. Alors

$$\langle Ph, \beta^t \xi \rangle = \langle h, (\nabla^* \nabla - 2\mathring{R})(\beta^t \xi) \rangle = \langle h, 2\beta^t \delta \beta^t \xi \rangle = 0$$

car h appartient à $\ker \beta$. Cela montre que $Ph \in \ker \beta$ pour tout $h \in D(P)$.

On aura ensuite besoin du lemme suivant :

Lemme 5.4. *Le domaine de l’opérateur ∇ , restreint à $\ker \beta$, est dense dans $\ker \beta$ pour la norme L^2 : $\overline{D(\nabla|_{\ker \beta})} = \ker \beta$.*

Démonstration du lemme. Ce résultat découle des deux théorèmes 4.1 et 4.9. On utilise la décomposition $L^2 = \ker \beta \oplus \text{Im } \delta^*$ et le fait que la projection p_1 sur le premier facteur est continue. Comme C_0^∞ est un sous-espace dense de L^2 , son image $p_1(C_0^\infty)$ est dense dans $\ker \beta$.

Maintenant soit $k \in p_1(C_0^\infty)$. Il existe $\phi \in C_0^\infty$ et $\eta \in D(\delta^*)$ tels que $k = p_1(\phi)$ et $\phi = k + \delta^* \eta$. On alors $\beta(\phi) = \beta(\delta^* \eta)$. Or $\beta(\phi)$ est à support compact, donc dans L^2 . D’après le théorème 4.9, $\nabla \nabla \eta$ est L^2 , et par conséquent $\delta^* \eta \in D(\nabla)$. Comme ϕ est C^∞ à support compact, elle est aussi dans $D(\nabla)$, et donc $k = \phi - \delta^* \eta \in D(\nabla)$. Par suite $p_1(C_0^\infty) \subset D(\nabla)$, et $D(\nabla) \cap \ker \beta = D(\nabla|_{\ker \beta})$ est dense dans $\ker \beta$. \square

Le fait que le domaine de $\nabla|_{\ker \beta}$ soit dense permet de considérer son adjoint $(\nabla|_{\ker \beta})^*$. On note i l'inclusion $\ker \beta \hookrightarrow L^2$; on a évidemment $\nabla|_{\ker \beta} = \nabla \circ i$. Son adjoint est donc $p \circ \nabla^*$, où p est la projection orthogonal de L^2 sur $\ker \beta$. De plus on déduit facilement que l'opérateur $\nabla|_{\ker \beta}$ est fermé du fait que ∇ et $\ker \beta$ sont fermés. Cela implique que $(\nabla|_{\ker \beta})^* \circ \nabla|_{\ker \beta} = p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker \beta}$ est auto-adjoint.

Maintenant, l'opérateur $p \circ \mathring{R}|_{\ker \beta} : h \mapsto p(h - (\text{tr } h)g)$ est un endomorphisme borné (i.e. continue) et auto-adjoint de $\ker \beta$, donc $p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker \beta} - 2p \circ \mathring{R}|_{\ker \beta}$ est encore auto-adjoint. Or

$$\begin{aligned} p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker \beta} - 2p \circ \mathring{R}|_{\ker \beta} &= p \circ (\nabla^* \circ \nabla|_{\ker \beta} - 2\mathring{R}|_{\ker \beta}) \\ &= p \circ P \\ &= P \end{aligned}$$

puisque l'image de P est incluse dans $\ker \beta$. On a ainsi montré que P était auto-adjoint.

La positivité découle de la formule de Weitzenböck utilisée pour démontrer la rigidité infinitésimale 21 : pour tout 2-tenseur symétrique h ,

$$\nabla^* \nabla h = d^\nabla \delta^\nabla h + \delta^\nabla d^\nabla h + nh - (\text{tr } h)g.$$

Si h est C_0^∞ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla h\|^2 &= \langle \nabla^* \nabla h, h \rangle \\ &= \langle d^\nabla \delta^\nabla h + \delta^\nabla d^\nabla h + nh - (\text{tr } h)g, h \rangle \\ &= \|\delta^\nabla h\|^2 + \|d^\nabla h\|^2 + n\|h\|^2 - \|\text{tr } h\|^2. \end{aligned}$$

Cette égalité est encore vraie si $h \in D(\nabla)$; il suffit de considérer une suite h_n de 2-tenseurs symétriques C_0^∞ telle que pour la norme L^2 , h_n converge vers h et ∇h_n vers ∇h .

Soit $h \in D(P)$. Comme h , ∇h , et $\nabla^* \nabla h$ sont dans L^2 , on peut intégrer par partie :

$$\begin{aligned} \langle Ph, h \rangle &= \langle \nabla^* \nabla h - 2h + 2(\text{tr } h)g, h \rangle \\ &= \|\nabla h\|^2 - 2\|h\|^2 + 2\|\text{tr } h\|^2 \\ &= \|\delta^\nabla h\|^2 + \|d^\nabla h\|^2 + (n-2)\|h\|^2 + \|\text{tr } h\|^2, \end{aligned}$$

et donc $\langle Ph, h \rangle \geq (n-2)\|h\|^2$. □

Corollaire 5.5. *Soit h_0 une déformation infinitésimale telle que $E'(h_0)$ soit dans L^2 . Alors il existe un unique 2-tenseur symétrique $h \in D(P)$ tel que la déformation $h_0 + h$ soit Einstein, i.e. $E'(h_0 + h) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E'(h_0) \in \ker \beta$ et de résoudre $Ph = -E'(h_0)$ dans $D(P)$. Et comme $h \in \ker \beta$, $E'(h) = \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R}h(-2\delta^* \beta h) = Ph$. □

Ce corollaire n'a d'intérêt que si la déformation h_0 n'est pas $L^{1,2}$. Sinon, d'après le théorème de rigidité infinitésimale, $h + h_0$ est une déformation triviale, c'est-à-dire que h est (au signe près) la composante dans $\ker \beta$ de h_0 . Mais si h_0 est bien choisi, on peut montrer ainsi le théorème suivant :

Théorème 5.6. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont strictement inférieurs à π . Soit $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p)$ une variation donnée du p -uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale normalisée h (i.e. telle que $E'(h) = 0$ et $\beta h = 0$) induisant la variation des angles coniques donnée.*

Démonstration. Sans perdre de généralités, on peut se limiter au cas où un seul des α_i est non nul, ce qui revient à ne considérer qu'une seule composante connexe Σ_k du lieu singulier.

Soit h_0 une déformation infinitésimale telle que h_0 soit égal à $\text{sh}(r)^2 d\theta^2$ près de Σ_k , et que h_0 soit nul en dehors d'un voisinage de cette composante connexe. C'est le modèle de déformation conique modifiant un (seul) angle conique. C'est aussi une déformation hyperbolique (donc Einstein) près du lieu singulier : en particulier, $E'(h_0)$ est C^∞ à support compact. Par contre h_0 n'est pas normalisée, et même pire que ça puisque $\beta h_0 \notin L^2$.

On va commencer par normaliser localement h_0 , c'est-à-dire que l'on cherche une 1-forme η telle que $\beta(h_0 - \delta^*\eta)$ soit nul près du lieu singulier. Si on prend η de la forme $f(r)e^r$, alors la fonction f vérifie l'équation différentielle (ordinaire)

$$-f''(r) - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r)\right)f'(r) + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + n-1\right)f(r) = \frac{2}{\text{th}(r)}.$$

Cette équation différentielle est à singularité régulière (selon la terminologie de [25]) ; elle admet au voisinage de $r = 0$ une solution de la forme $f(r) = -r \ln(r) + r^3(f_1(r) + \ln(r)f_2(r))$, où f_1 et f_2 sont développables en séries entières. On définit alors $\chi(r)$ comme étant une fonction lisse égale à $-r \ln(r) + r^3(f_1(r) + \ln(r)f_2(r))$ près de Σ_k , et nulle en dehors d'un certain voisinage de Σ_k .

On note maintenant $h_1 = h_0 - \delta^*(\chi(r)e^r)$; près du lieu singulier, on a encore $E'(h_1) = 0$, et en plus $\beta h_1 = 0$. Au premier ordre, $h_1 = (1 + \ln(r))(dr^2 + \text{sh}(r)^2 d\theta^2) + O(r^2 \ln(r))$, c'est-à-dire que h_1 ressemble asymptotiquement à une déformation conforme de la métrique du cône, et h_1 appartient à L^2 . Par contre ∇h_1 n'est pas L^2 .

On va maintenant normaliser globalement h_1 , c'est-à-dire que l'on va résoudre l'équation $\beta\delta^*\eta = \beta h_1$ sur tout M et non plus seulement sur un voisinage du lieu singulier. Comme βh_1 est C^∞ à support compact et que les angles coniques sont inférieurs à π , d'après le lemme 4.10 l'équation admet une unique solution η dans $L^{2,2}(T^*M)$ (et son comportement au voisinage du lieu singulier est assez bien compris).

On pose alors $h_2 = h_1 - \delta^*\eta$. Cette déformation est dans L^2 , mais ∇h_2 n'est pas dans L^2 (puisque $\nabla\delta^*\eta \in L^2$ et $\nabla h_1 \notin L^2$). On a aussi $E'(h_2) \in C_0^\infty(S^2M)$ et $\beta h_2 = 0$.

On peut maintenant appliquer le corollaire. On construit ainsi une déformation Einstein infinitésimale $h_{\tilde{\alpha}}$, normalisée, et qui ne diffère de h_2 que par un élément de $D(P) \subset L^{1,2}$. Cette déformation $h_{\tilde{\alpha}}$ modifie donc les angles coniques de la même façon que h_2 et que h_0 ; elle induit donc bien la variation voulue des angles coniques. \square

Comme on l'a mentionné dans l'introduction, ces deux résultats montrent que dans un certain sens, l'espace tangent à une cône-variété hyperbolique parmi les structures de cônes-variétés Einstein est de dimension finie, paramétré par les variations du p -uplet des angles coniques. On voudrait maintenant en savoir plus sur le comportement des déformations Einstein infinitésimales que l'on vient de construire. En fait celui-ci est relativement facile à comprendre ; cet étude est l'objet de la section suivante.

6 Comportement des déformations

On a vu (théorème 5.6) qu'à toute variation du p -uplet des angles coniques correspondait une unique déformation Einstein infinitésimale normalisée. Cette déformation est de la forme $h_1 - \delta^*\eta - h$. On connaît le terme h_1 : il ressemble asymptotiquement à un certain changement conforme de la métrique du cône. Le terme en $\delta^*\eta$ est une déformation triviale correspondant à la normalisation. On sait que $L\eta = 0$ près du lieu singulier ; les résultats de la section 4.2.3 détaillent son comportement.

Le terme h est moins bien connu. On sait cependant qu'il vérifie la condition de jauge de Bianchi ainsi que l'équation $Ph = 0$ au voisinage du lieu singulier.

On peut alors procéder avec l'opérateur $P = \nabla^* \nabla - 2\mathring{R}$, agissant sur les 2-tenseurs symétriques, comme on l'a fait avec l'opérateur $L = \nabla^* \nabla + (n-1)Id$, agissant sur les 1-formes. La connaissance du comportement des solutions de l'équation $Pu = 0$ près du lieu singulier nous permettra d'obtenir des résultats sur la régularité des déformations Einstein infinitésimales ; on montrera en particulier à la section 6.2 que la déformation induite de la métrique du lieu singulier est C^∞ .

6.1 Etude de l'opérateur linéarisé

Soit u une déformation infinitésimale Einstein. Si elle est normalisée (c'est-à-dire si elle vérifie la condition de jauge de Bianchi $\beta(u) = 0$), elle vérifie l'équation

$$\nabla^* \nabla u - 2\mathring{R}u = 0.$$

L'étude des déformations Einstein est donc fortement reliée à l'étude de l'opérateur $P = \nabla^* \nabla - 2\mathring{R}$, le linéarisé de l'équation d'Einstein pour une déformation normalisée. Dans le cas général, son étude peut être assez compliquée. Cependant si la forme quadratique $\langle \mathring{R}u, u \rangle$ n'est pas trop positive, l'opérateur P est coercif, ce qui permet d'obtenir des résultats intéressants. Et les propriétés voulues de \mathring{R} peuvent se déduire de certaines hypothèses de courbure sur la métrique (voir [2] §12.67 et 12.71). Dans le cas qui nous intéresse ici, la métrique est hyperbolique, et on a l'expression plus simple

$$Pu = \nabla^* \nabla u - 2u + 2(\text{tr } u)g.$$

L'opérateur P présente de nombreuses similarités avec l'opérateur $L = \nabla^* \nabla + (n-1)Id$ agissant sur les 1-formes, dont l'étude approfondie était l'objet de la section 4.2. Il y a donc de nombreuses ressemblances dans le plan, les résultats et les formulations entre les deux sections.

6.1.1 Expression de l'opérateur en coordonnées cylindriques

On voudrait maintenant avoir plus de précisions sur les solutions de l'équation $Pu = 0$ au voisinage du lieu singulier. Pour cela, on va se placer en coordonnées cylindriques au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier.

On utilisera les mêmes notations que dans la section 4.2.1. Pour rappel, les notations e_1, \dots, e_{n-2} désignent des champs de vecteurs locaux tels que $(e_r, e_\theta, e_1, \dots, e_{n-2})$ forme un repère mobile orthonormé (local), vérifiant $\nabla_{e_r} e_k = \nabla_{e_\theta} e_k = 0$ pour tout k dans $1 \dots n-2$. On définit de même des 1-formes locales e^1, \dots, e^{n-2} telles que $(e^r, e^\theta, e^1, \dots, e^{n-2})$ soit le repère mobile dual du précédent. La notation N désigne le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a , dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de $T_x^* M$ orthogonal à e^θ et e^r , et N^* désigne le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a , dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de $T_x M$ orthogonal à e_θ et e_r . Les sections (e_1, \dots, e_{n-2}) forment localement une base de N^* , de même pour (e^1, \dots, e^{n-2}) et N . Si s est une section de N^* , et t une section de N ou de N^* , on note $\nabla_{\Sigma s} t$, ou de façon plus lisible $(\nabla_{\Sigma})(s, t)$, la projection orthogonale sur N ou sur N^* de $\nabla_s t$.

On introduit en plus le sous-fibré $S^2 N$, engendré par les $e_i \odot e_j$, $1 \leq i \leq n-2$, $0 \leq j \leq n-2$. (Si a et b sont deux 1-formes, on note $a \odot b$, ou plus simplement s'il n'y a pas de risque de confusion, $a.b$ ou ab pour $\frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a)$. En particulier, $x \odot x = x \otimes x$.) Si k est une section de $S^2 N$ et s est une section de N^* , on définit de même $\nabla_{\Sigma}(s, k)$ comme étant la projection orthogonale sur $S^2 N$ de la dérivée covariante $\nabla_s k$ prise dans $S^2(M)$.

Si ω est une section de N , on définit $\delta_\Sigma^* \omega$, section de $S^2 N$, par

$$\delta_\Sigma^* \omega = \sum_{i=1}^{n-2} e^i \odot \nabla_\Sigma(e_i, \omega).$$

Enfin, si k est une section de $S^2 M$, on définit $\delta_\Sigma k$, section de N , et $\text{tr}_\Sigma k$ par

$$\delta_\Sigma k = -\text{ch}(r)^2 \sum_{i=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(e_i, k)(e_i)$$

et

$$\text{tr}_\Sigma k = \text{ch}(r)^2 \sum_{i=1}^{n-2} k(e_i, e_i).$$

Si u est une section de $S^2 M$, on peut la décomposer orthogonalement au-dessus de U_a en

$$u = f e^r \cdot e^r + g e^\theta \cdot e^\theta + h e^r \cdot e^\theta + \sigma \cdot e^r + \eta \cdot e^\theta + k$$

où σ et η sont des sections de N , et où k est une section de $S^2 N$. Quelques calculs élémentaires permettent d'appliquer la même décomposition à $\nabla^* \nabla u - 2\check{R}u = \nabla^* \nabla u - 2u + 2(\text{tr } u)g$. En regroupant les termes on obtient alors, pour la composante suivant $e^r \cdot e^r$:

$$\Delta f + 2 \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 \right) f + \left(2 - \frac{2}{\text{th}(r)^2} \right) g + \frac{2e_\theta \cdot h}{\text{th}(r)} - \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)^2} (\delta_\Sigma \sigma) + \frac{2 - 2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)^2} (\text{tr}_\Sigma k)$$

pour la composante suivant $e^\theta \cdot e^\theta$:

$$\left(2 - \frac{2}{\text{th}(r)^2} \right) f + \Delta g + \frac{2}{\text{th}(r)^2} g - \frac{2e_\theta \cdot h}{\text{th}(r)} + \frac{2}{\text{ch}(r)^2} \text{tr}_\Sigma k$$

pour la composante suivant $e^r \cdot e^\theta$:

$$-4 \frac{e_\theta \cdot f}{\text{th}(r)} + 4e_\theta \cdot g \frac{1}{\text{th}(r)} + \Delta h + \left(\frac{4}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 - 2 \right) h - \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)^2} (\delta_\Sigma \eta)$$

pour la composante incluse dans $N \cdot e^r$:

$$\begin{aligned} -4\text{th}(r)d_\Sigma f - \nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \sigma - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \sigma - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \nabla_{e_r} \sigma + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \sigma \\ + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n+1)\text{th}(r)^2 - 2 \right) \sigma + \frac{2}{\text{th}(r)} (\nabla_{e_\theta} \eta) - \frac{4\text{th}(r)}{\text{ch}(r)^2} \delta_\Sigma k \end{aligned}$$

pour la composante incluse dans $N \cdot e^\theta$:

$$\begin{aligned} -2\text{th}(r)d_\Sigma h - \nabla_{e_r} \nabla_{e_r} \eta - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} \eta - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \nabla_{e_r} \eta + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \eta \\ + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + \text{th}(r)^2 - 2 \right) \eta - \frac{2}{\text{th}(r)} (\nabla_{e_\theta} \sigma) \end{aligned}$$

et enfin pour la composante incluse dans S^2N :

$$(2 - 2\text{th}(r)^2) f \text{ch}(r)^2 g_\Sigma + 2g - 2\text{th}(r) \delta_\Sigma^* \sigma - \nabla_{e_r} \nabla_{e_r} k - \nabla_{e_\theta} \nabla_{e_\theta} k - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \nabla_{e_r} k \\ + \frac{1}{\text{ch}(r)^2} (\nabla^* \nabla)_\Sigma k + (2\text{th}(r)^2 - 2) k + 2\text{tr}_\Sigma k g_\Sigma$$

Pour pouvoir manipuler cette expression, on va effectuer dans la suite une sorte de décomposition en séries de Fourier généralisées, c'est-à-dire une décomposition sur des vecteurs propres d'opérateurs elliptiques du second degré. Mais il faut une décomposition suffisamment astucieuse pour qu'elle se comporte bien avec les opérateurs d_Σ , δ_Σ^* , etc. qui apparaissent dans les expressions ci-dessus.

6.1.2 Décomposition en série de Fourier généralisée

Lors de l'étude de l'opérateur $\nabla^* \nabla + (n-1)Id$ agissant sur les 1-formes, on va déjà eu besoin d'une décomposition bien choisie des espace $L^2(M)$ et $L^2(N)$. Ce qu'il nous faut maintenant est une base hilbertienne de $L^2(S^2N)$, dans laquelle le comportement des opérateurs δ_Σ^* , tr_Σ etc. se comprennent bien.

On va utiliser la proposition suivante, qui complète la proposition 4.5 (voir la section 4.2.2 pour certaines notations).

Proposition 6.1. *Il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(\Sigma_a)$, telle que pour tout indice j , il existe un réel $\lambda_j \geq 0$ et un entier relatif p_j , pour lesquels*

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ e_\theta \cdot \psi_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} \psi_j. \end{cases}$$

Soit J l'ensemble des j pour lesquels $\lambda_j > 0$. Il existe une base hilbertienne $(\phi_j)_{j \in J} \cup (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(N)$, telle que :

- pour tout indice j appartenant à J , $\phi_j = \frac{\text{ch}(a)}{(\lambda_j)^{1/2}} d_\Sigma \psi_j$, et donc

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3) \phi_j \\ \nabla_{e_\theta} \phi_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \text{ch}(a) (\lambda_j)^{1/2} \psi_j; \end{cases}$$

- pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, il existe un réel μ_j et un entier relatif p'_j , pour lesquels

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \nabla_{e_\theta} \varphi_j = \frac{ip'_j \gamma}{\text{sh}(a)} \varphi_j, \end{cases}$$

et on a de plus $\delta_\Sigma \varphi_j = 0$.

Il existe une base hilbertienne $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \cup (b_j)_{j \in J} \cup (c_j)_{j \in \mathbb{N}} \cup (d_j)_{j \in \mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(S^2N)$, telle que :

- pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, $a_j = \frac{\psi_j}{\sqrt{n-2}} \text{ch}(a)^2 g_\Sigma$, et donc

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma a_j = \lambda_j a_j \\ \nabla_{e_\theta} a_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} a_j \\ \text{tr}_\Sigma a_j = \sqrt{n-2} \text{ch}(a)^2 \psi_j \\ \delta_\Sigma a_j = -\frac{\text{ch}(a)^2}{\sqrt{n-2}} d_\Sigma \psi_j \quad (= -\text{ch}(a) (\frac{\lambda_j}{n-2})^{1/2} \phi_j \text{ si } \lambda_j \neq 0); \end{cases}$$

– pour tout indice $j \in J$, $b_j = \frac{\text{ch}(a)}{\sqrt{n-3}}(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1)^{-1/2} \left(\delta_\Sigma^* \phi_j + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma \phi_j)g_\Sigma \right)$, et donc

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma b_j = (\lambda_j + 2(n-2))b_j \\ \nabla_{e_\theta} b_j = \frac{ip_j \gamma}{\text{sh}(a)} b_j \\ \text{tr}_\Sigma b_j = 0 \\ \delta_\Sigma b_j = \text{ch}(a)\sqrt{n-3}(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1)^{1/2} \phi_j; \end{cases}$$

– pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, $c_j = \text{ch}(a)(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{-1/2} \delta_\Sigma^* \varphi_j$, et donc

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma c_j = (\mu_j + n - 1)c_j \\ \nabla_{e_\theta} c_j = \frac{ip'_j \gamma}{\text{sh}(a)} c_j \\ \text{tr}_\Sigma c_j = 0 \\ \delta_\Sigma c_j = \text{ch}(a)(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{1/2} \varphi_j; \end{cases}$$

– pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, il existe un réel $\nu_j \geq 0$ et un entier relatif p''_j , pour lesquels

$$\begin{cases} (\nabla^* \nabla)_\Sigma d_j = \nu_j d_j \\ \nabla_{e_\theta} \varphi_j = \frac{ip''_j \gamma}{\text{sh}(a)} d_j, \end{cases}$$

et on a de plus

$$\begin{cases} \delta_\Sigma d_j = 0 \\ \text{tr}_\Sigma d_j = 0. \end{cases}$$

Cette proposition, comme la proposition 4.5, se démontre à l'aide des résultats sur la théorie spectrale des submersions riemanniennes à fibres totalement géodésiques, voir [3] et [6]. Les liens entre les fonctions, les 1-formes et les 2-tenseurs symétriques sont donnés, en plus de la relation (11), par les relations de commutations suivantes, qui utilisent le fait que la métrique sur le lieu singulier Σ est hyperbolique : pour toute section ω de N ,

$$\nabla^* \nabla_\Sigma (\delta_\Sigma^* \omega) = (n-1)\delta_\Sigma^* \omega + 2(\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma + \delta_\Sigma^* (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega)$$

et

$$\begin{aligned} \nabla^* \nabla_\Sigma ((\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma) &= \Delta_\Sigma (\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma \\ &= (\delta_\Sigma (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega) - (n-3)(\delta_\Sigma \omega))g_\Sigma. \end{aligned}$$

La première est la relation (20) vue p.36, appliquée à la métrique g_Σ . Elle découle directement de l'invariance par difféomorphisme du tenseur de Ricci. Dans la deuxième relation, la première égalité est élémentaire, et la deuxième utilise le fait que Δ_Σ et δ_Σ commutent ainsi que la formule de Weitzenböck (8). En combinant les deux relations de commutations on trouve une dernière relation :

$$\begin{aligned} \nabla^* \nabla_\Sigma (\delta_\Sigma^* \omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma) &= (n-1)\delta_\Sigma^* \omega + 2(\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma + \delta_\Sigma^* (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega) - (n-3)(\delta_\Sigma \omega))g_\Sigma \\ &= (n-1)(\delta_\Sigma^* \omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma \omega)g_\Sigma) + \delta_\Sigma^* (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega) \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma (\nabla^* \nabla_\Sigma \omega))g_\Sigma. \end{aligned}$$

Maintenant, comme dans la section 4.2.2, on prolonge ces sections à tout U_a par transport parallèle le long des géodésiques intégrales du champ de vecteurs e_r . Par simple changement d'échelle, on observe que les tenseurs prolongés se comportent de la façon suivante sur le voisinage U_a de Σ :

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial r} \psi_j = 0 \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_j = ip_j \gamma \psi_j \\
\Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\
d_\Sigma \psi_j = \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \phi_j \text{ (ou } 0 \text{ si } \lambda_j = 0) \\
\psi_j g_\Sigma = \frac{(n-2)^{1/2}}{\text{ch}(r)^2} a_j,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \phi_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \phi_j = ip_j \gamma \phi_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3) \phi_j \\
\delta_\Sigma \phi_j = \text{ch}(r) (\lambda_j)^{1/2} \psi_j \\
\delta_\Sigma^* \phi_j = \text{ch}(r)^{-1} (n-3)^{1/2} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1 \right)^{1/2} b_j - \text{ch}(r)^{-1} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} \right)^{1/2} a_j,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \varphi_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \varphi_j = ip'_j \gamma \varphi_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\
\delta_\Sigma \varphi_j = 0 \\
\delta_\Sigma^* \varphi_j = \text{ch}(r)^{-1} \left(\frac{\mu_j + n - 3}{2} \right)^{1/2} c_j,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} a_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} a_j = ip_j \gamma a_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma a_j = \lambda_j a_j \\
\delta_\Sigma a_j = -\text{ch}(r) \left(\frac{\lambda_j}{n-2} \right)^{1/2} \phi_j \text{ (ou } 0 \text{ si } \lambda_j = 0) \\
\text{tr}_\Sigma a_j = \sqrt{n-2} \text{ch}(r)^2 \psi_j,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} b_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} b_j = ip_j \gamma b_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma b_j = (\lambda_j + 2(n-2)) b_j \\
\delta_\Sigma b_j = \text{ch}(r) \sqrt{n-3} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1 \right)^{1/2} \phi_j \\
\text{tr}_\Sigma b_j = 0,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} c_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} c_j = ip'_j \gamma c_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma c_j = (\mu_j + n - 1) c_j \\
\delta_\Sigma c_j = \text{ch}(r) \left(\frac{\mu_j + n - 3}{2} \right)^{1/2} \varphi_j \\
\text{tr}_\Sigma c_j = 0,
\end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d_j = 0 \\
\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} d_j = ip''_j \gamma d_j \\
(\nabla^* \nabla)_\Sigma d_j = \nu_j d_j \\
\delta_\Sigma d_j = 0 \\
\text{tr}_\Sigma d_j = 0
\end{cases} \quad .$$

L'existence de ces bases hilbertiennes va permettre de réduire l'équation aux dérivées partielles $Pu = 0$ en une infinité d'équations différentielles ordinaires. On rappelle la décomposition orthogonale d'un 2-tenseur symétrique u au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier :

$$u = f e^r \cdot e^r + g e^\theta \cdot e^\theta + h e^r \cdot e^\theta + \sigma \cdot e^r + \eta \cdot e^\theta + k$$

où σ et η sont des sections de N , et où k est une section de $S^2 N$. En utilisant les résultats de la section précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(r) \psi_j e^r \cdot e^r + \sum_{j \in \mathbb{N}} g_j(r) \psi_j e^\theta \cdot e^\theta + \sum_{j \in \mathbb{N}} h_j(r) \psi_j e^r \cdot e^\theta \\ &+ \sum_{j \in J} \sigma_j(r) \phi_j \cdot e^r + \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\sigma}_j(r) \varphi_j \cdot e^r \\ &+ \sum_{j \in J} \eta_j(r) \phi_j \cdot e^\theta + \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{\eta}_j(r) \varphi_j \cdot e^\theta \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j^1(r) a_j + \sum_{j \in J} k_j^2(r) b_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j^3(r) c_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j^4(r) d_j. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de regrouper les termes de cette décomposition de la façon suivante, faisant apparaître des “blocs élémentaires” de même fréquence :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in J} \left(f_j(r) \psi_j e^r \cdot e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \cdot e^\theta + h_j(r) \psi_j e^r \cdot e^\theta + \sigma_j(r) \phi_j \cdot e^r + \eta_j(r) \phi_j \cdot e^\theta \right. \\ &\quad \left. + k_j^1(r) a_j + k_j^2(r) b_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(f_j(r) \psi_j e^r \cdot e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \cdot e^\theta + h_j(r) \psi_j e^r \cdot e^\theta + k_j^1(r) a_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\bar{\sigma}_j(r) \varphi_j \cdot e^r + \bar{\eta}_j(r) \varphi_j \cdot e^\theta + k_j^3(r) c_j \right) \\ &+ \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j^4(r) d_j. \end{aligned} \tag{26}$$

Maintenant, on fait la même décomposition pour $\nabla^* \nabla u - 2u + 2(\text{tr } u)g$, dont l'expression en coordonnées cylindriques est donnée à la section 6.1.1. On obtient alors, pour la composante en $\psi_j e^r \cdot e^r$, si $j \in J$:

$$\begin{aligned} -f_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) f_j' + \left(\frac{2}{\text{th}(r)^2} + 2(n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} \right) f_j \\ + (2 - \frac{2}{\text{th}(r)^2}) g_j + \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} h_j - \frac{2\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \sigma_j + (2 - 2\text{th}(r)^2)(n-2)^{1/2} k_j^1, \end{aligned} \tag{27}$$

si $j \notin J$:

$$\begin{aligned} -f_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) f_j' + \left(\frac{2}{\text{th}(r)^2} + 2(n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} \right) f_j \\ + (2 - \frac{2}{\text{th}(r)^2}) g_j + \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} h_j + (2 - 2\text{th}(r)^2)(n-2)^{1/2} k_j^1, \end{aligned} \tag{28}$$

pour la composante en $\psi_j e^\theta . e^\theta$:

$$-g_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) g_j' + \left(\frac{2}{\text{th}(r)^2} + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} \right) g_j \\ + (2 - \frac{2}{\text{th}(r)^2}) f_j - \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} h_j + 2(n-2)^{1/2} k_j^1, \quad (29)$$

pour la composante en $\psi_j e^r . e^\theta$, si $j \in J$:

$$-h_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) h_j' + \left(\frac{4}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) h_j \\ - \frac{4ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} f_j + \frac{4ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} g_j - \frac{2\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \eta_j, \quad (30)$$

si $j \notin J$:

$$-h_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) h_j' + \left(\frac{4}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} - 2 \right) h_j \\ - \frac{4ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} f_j + \frac{4ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} g_j, \quad (31)$$

pour la composante en $\phi_j . e^r$:

$$-\sigma_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \sigma_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n+1)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j + n - 3}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) \sigma_j \\ - \frac{4\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} f_j + \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \eta_j + \frac{4\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} \right)^{1/2} k_j^1 - \frac{4\text{th}(r)(n-3)^{1/2}}{\text{ch}(r)} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1 \right)^{1/2} k_j^2, \quad (32)$$

pour la composante en $\phi_j . e^\theta$:

$$-\eta_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \eta_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + \text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j + n - 3}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) \eta_j \\ - \frac{2\text{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\text{ch}(r)} h_j - \frac{2ip_j \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \sigma_j, \quad (33)$$

pour la composante en $\varphi_j . e^r$:

$$-\bar{\sigma}_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \bar{\sigma}_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n+1)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) \bar{\sigma}_j \\ + \frac{2ip_j' \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \bar{\eta}_j - \frac{4\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} \left(\frac{\mu_j + n - 3}{2} \right)^{1/2} k_j^3, \quad (34)$$

pour la composante en $\varphi_j . e^\theta$:

$$-\bar{\eta}_j'' - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) \bar{\eta}_j' + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + \text{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) \bar{\eta}_j \\ - \frac{2ip_j' \gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \bar{\sigma}_j, \quad (35)$$

pour la composante en a_j , si $j \in J$:

$$-k_j^{1''} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) k_j^{1'} + \left(2\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\text{ch}(r)^2} - 2 + 2(n-2) \right) k_j^1 \\ + 2(n-2)^{1/2}(1 - \text{th}(r)^2)f_j + 2(n-2)^{1/2}g_j + \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} \right)^{1/2} \sigma_j, \quad (36)$$

si $j \notin J$:

$$-k_j^{1''} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) k_j^{1'} + \left(2\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} - 2 + 2(n-2) \right) k_j^1 \\ + 2(n-2)^{1/2}(1 - \text{th}(r)^2)f_j + 2(n-2)^{1/2}g_j, \quad (37)$$

pour la composante en b_j :

$$-k_j^{2''} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) k_j^{2'} + \left(2\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j + 2(n-2)}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) k_j^2 \\ - \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} (n-3)^{1/2} \left(\frac{\lambda_j}{n-2} + 1 \right)^{1/2} \sigma_j, \quad (38)$$

pour la composante en c_j :

$$-k_j^{3''} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) k_j^{3'} + \left(2\text{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j + n-1}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) k_j^3 \\ - \frac{2\text{th}(r)}{\text{ch}(r)} \left(\frac{\mu_j + n-3}{2} \right)^{1/2} \bar{\sigma}_j, \quad (39)$$

et pour la composante en d_j :

$$-k_j^{4''} - \left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r) \right) k_j^{4'} + \left(2\text{th}(r)^2 + \frac{p_j''^2 \gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\nu_j}{\text{ch}(r)^2} - 2 \right) k_j^4. \quad (40)$$

6.1.3 Comportement des solutions de l'équation homogène

Comme à la section 4.2.3, on constate que pour chaque indice j , l'équation (ou plutôt le système) que l'on obtient présente une singularité "régulière" en $r = 0$. Les solutions de ces équations sont donc des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $r^\kappa f(r)$ avec f une fonction analytique, où les exposants κ s'obtiennent comme racines de l'équation indicelle (en cas de racines multiples ou séparées par des entiers, il faut éventuellement rajouter des termes en $\ln r$ dans l'expression des solutions).

On pose donc, pour un indice j donné,

$$f_j(r) = r^\kappa (f_0 + f_1 r + f_2 r^2 + \dots), \\ g_j(r) = r^\kappa (g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \dots), \\ \text{etc.}$$

A partir des expressions (27) à (40), on aboutit aux systèmes d'équations indicielles suivants : si $j \in J$,

$$\left\{ \begin{array}{llll} (-\kappa^2 + 2 + p_j^2 \gamma^2) f_0 & - & 2g_0 & + & 2ip_j \gamma h_0 & = & 0 \\ & -2f_0 & + & (-\kappa^2 + 2 + p_j^2 \gamma^2) g_0 & - & 2ip_j \gamma h_0 & = & 0 \\ & -4ip_j \gamma f_0 & + & 4ip_j \gamma g_0 & + & (-\kappa^2 + 4 + p_j^2 \gamma^2) h_0 & = & 0 \\ & & (-\kappa^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) \sigma_0 & + & 2ip_j \gamma \eta_0 & = & 0 \\ & & -2ip_j \gamma \sigma_0 & + & (-\kappa^2 + 1 + p_j^2 \gamma^2) \eta_0 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2 + p_j^2 \gamma^2) k_0^1 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2 + p_j^2 \gamma^2) k_0^2 & = & 0, \end{array} \right.$$

si $j \notin J$,

$$\left\{ \begin{array}{llll} (-\kappa^2 + 2 + p_j^2 \gamma^2) f_0 & - & 2g_0 & + & 2ip_j \gamma h_0 & = & 0 \\ & -2f_0 & + & (-\kappa^2 + 2 + p_j^2 \gamma^2) g_0 & - & 2ip_j \gamma h_0 & = & 0 \\ & -4ip_j \gamma f_0 & + & 4ip_j \gamma g_0 & + & (-\kappa^2 + 4 + p_j^2 \gamma^2) h_0 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2 + p_j^2 \gamma^2) k_0^1 & = & 0, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{llll} (-\kappa^2 + 1 + p_j'^2 \gamma^2) \bar{\sigma}_0 & + & 2ip_j' \gamma \bar{\eta}_0 & = & 0 \\ & -2ip_j' \gamma \bar{\sigma}_0 & + & (-\kappa^2 + 1 + p_j'^2 \gamma^2) \bar{\eta}_0 & = & 0 \\ & & & (-\kappa^2 + p_j'^2 \gamma^2) k_0^3 & = & 0, \end{array} \right.$$

et enfin,

$$(-\kappa^2 + p_j''^2 \gamma^2) k_0^4 = 0.$$

Un simple calcul de déterminant donne maintenant les racines indicielles, c'est-à-dire les valeurs de κ pour lesquelles les systèmes ci-dessus admettent des solutions non triviales. On trouve que les exposants dominants sont de la forme $\pm p_j \gamma$, $\pm p_j \gamma \pm 1$ et $\pm p_j \gamma \pm 2$, $\pm p_j' \gamma$ et $\pm p_j' \gamma \pm 1$, et $\pm p_j'' \gamma$. La seule racine multiple posant problème est en 0 (uniquement) si p_j , p_j' ou p_j'' est nul (ce qui arrive toujours), ou si $p_j \gamma \in \{-2, -1, 1, 2\}$ ou $p_j' \gamma \in \{-1, 1\}$ (ce qui n'arrivera jamais avec nos conditions d'angles). Il faut dans ces cas rajouter une solution logarithmique.

Plus précisément :

- si $\kappa = \pm(p\gamma + 2)$, alors (f_0, g_0, h_0) est multiple de $(-1, 1, 2i)$;
- si $\kappa = \pm(p\gamma - 2)$, alors (f_0, g_0, h_0) est multiple de $(1, -1, 2i)$;
- si $\kappa = \pm p\gamma$, alors $(f_0, g_0, h_0, k_0^1, k_0^2)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 0, 1)$;
- si $\kappa = \pm(p\gamma + 1)$, alors (σ_0, η_0) est multiple de $(1, -i)$;
- si $\kappa = \pm(p\gamma - 1)$, alors (σ_0, η_0) est multiple de $(1, i)$.
- Si $\kappa = \pm(p'\gamma + 1)$, alors $(\bar{\sigma}_0, \bar{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(1, -i, 0)$;
- si $\kappa = \pm(p'\gamma - 1)$, alors $(\bar{\sigma}_0, \bar{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(1, i, 0)$;
- si $\kappa = \pm p'\gamma$, alors $(\bar{\sigma}_0, \bar{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(0, 0, 1)$.

Enfin, l'équation pour k^4 donne deux solutions d'exposants dominants $\kappa = \pm p'' \gamma$.

On obtient ainsi toute une famille de solutions élémentaires, que l'on pourrait regrouper dans un énoncé inutilement long, similaire à celui de la proposition 4.6. Rappelons juste que si u est solution de l'équation $Pu = 0$ au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier, alors chacun des termes

de la décomposition en série (26)

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j \in J} \left(f_j(r) \psi_j e^r \cdot e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \cdot e^\theta + h_j(r) \psi_j e^r \cdot e^\theta + \sigma_j(r) \phi_j \cdot e^r + \eta_j(r) \phi_j \cdot e^\theta \right. \\
&\quad \left. + k_j^1(r) a_j + k_j^2(r) b_j \right) \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus J} \left(f_j(r) \psi_j e^r \cdot e^r + g_j(r) \psi_j e^\theta \cdot e^\theta + h_j(r) \psi_j e^r \cdot e^\theta + k_j^1(r) a_j \right) \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\bar{\sigma}_j(r) \varphi_j \cdot e^r + \bar{\eta}_j(r) \varphi_j \cdot e^\theta + k_j^3(r) c_j \right) \\
&+ \sum_{j \in \mathbb{N}} k_j^4(r) d_j
\end{aligned}$$

est une solution de l'équation $Pu = 0$, et est une combinaison linéaire des solutions élémentaires correspondantes.

6.2 Régularité des déformations induites

La connaissance des exposants dominants permet de comprendre ce qu'il se passe au voisinage du lieu singulier, quand r tend vers 0. En particulier, on va démontrer la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Soit u un 2-tenseur symétrique, appartenant à $L^{1,2}$ et solution de l'équation $Pu = 0$ au voisinage d'une composante connexe Σ du lieu singulier, dont l'angle conique α n'est pas un multiple de π . Alors u induit sur Σ un 2-tenseur symétrique u_Σ , qui est C^∞ .*

Démonstration. Le fait que soit u soit dans $L^{1,2}$ impose des restrictions sur les solutions élémentaires apparaissant dans la décomposition de u . Comme dans la démonstration du lemme 4.7, on trouve que les composants de u sont combinaisons linéaires des seules solutions élémentaires d'exposant dominant $\kappa \geq 0$, sans terme logarithmique.

Par conséquent, tous les termes de la décomposition en série de u sont bornés, et les seuls termes ne tendant pas vers 0 quand r tend vers 0 sont ceux d'exposant dominant κ nul. On a vu que κ était de la forme $\pm p_j \gamma$, $\pm p_j \gamma \pm 1$, $\pm p_j \gamma \pm 2$, $\pm p'_j \gamma$, $\pm p'_j \gamma \pm 1$, ou $\pm p''_j \gamma$. Si l'angle conique $\alpha = \frac{2\pi}{\gamma}$ n'est pas un multiple de π , les exposants dominants nuls sont donc ceux de la forme $\pm p_j \gamma$, $\pm p'_j \gamma$ et $\pm p''_j \gamma$ pour $p_j = 0$, $p'_j = 0$ et $p''_j = 0$. Il s'agit donc uniquement de termes ne dépendant pas de la variable d'angle θ , ce qui permet de regarder leur limite quand r tend vers 0.

On peut alors considérer le tenseur induit sur Σ , qui s'écrit formellement comme une série

$$u_\Sigma = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p_j = 0}} (k_j^1(0) a_j + k_j^2(0) b_j) + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p'_j = 0}} k_j^3(0) c_j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p''_j = 0}} k_j^4(0) d_j \quad (41)$$

Notons que comme les sections de $S^2 N$ a_j , b_j , c_j et d_j qui apparaissent ici ne dépendent pas la variable d'angle θ , elles s'identifient naturellement avec des sections de $S^2 \Sigma$, et forment une base hilbertienne de $L^2(S^2 \Sigma)$.

On va maintenant montrer que la série (41) définit bien un 2-tenseur symétrique C^∞ sur Σ . De même que dans la démonstration des lemmes 4.7 et 4.10, cela peut se faire de deux manières : soit en utilisant les résultats de [17] sur les opérateurs d'arêtes elliptiques, soit en majorant les termes de la série, à la façon de [18].

Cette deuxième méthode est ici assez simple. Rappelons que pour r assez petit, on note Σ_r le bord d'un r -voisinage (tubulaire) de Σ . Il hérite naturellement d'une structure de fibré en cercle sur

Σ , dont la projection canonique sur Σ est (à une homothétie de facteur $\text{ch}(r)$ près) une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques. La métrique sur Σ_r , induite de celle de M , est localement celle d'un produit, et le fibré tensoriel S^2N est trivial le long des fibres de la submersion. Cela permet de considérer l'intégrale le long des fibres de la submersion d'une section de S^2N au-dessus de Σ_r ; le résultat est une section de $S^2\Sigma$.

Si on intègre ainsi, le long des fibres de la submersion, la composante selon S^2N de la restriction à Σ_r du tenseur u , on obtient une section $u_\Sigma(r)$ de $S^2\Sigma$, qui s'exprime sous la forme d'une série

$$u_\Sigma(r) = \alpha \text{sh}(r) \text{ch}(r)^2 \left(\sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p_j=0}} (k_j^1(r)a_j + k_j^2(r)b_j) + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p'_j=0}} k_j^3(r)c_j + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ p''_j=0}} k_j^4(r)d_j \right),$$

les termes pour lesquels p_j (ou p'_j , ou p''_j) est différent de 0 disparaissant lors de l'intégration.

Or comme l'opérateur P est elliptique, le tenseur u est C^∞ , ainsi que la composante selon S^2N de sa restriction à Σ_r . Le tenseur $u_\Sigma(r)$ est donc lui aussi C^∞ , ce qui implique en particulier une décroissance rapide de ces coefficients : pour tout polynôme P , les quantités $|P(\lambda_j)k_j^1(r)|$ et $|P(\lambda_j)k_j^2(r)|$ tendent vers 0 quand j parcourt l'ensemble $\{j \in \mathbb{N} \mid p_j = 0\}$, et il en est de même pour $|P(\mu_j)k_j^3(r)|$ et $|P(\nu_j)k_j^4(r)|$ en remplaçant p_j par respectivement p'_j et p''_j .

On utilise ensuite le fait que les solutions élémentaires d'exposant dominant nul, c'est-à-dire précisément celles apparaissant dans l'expression en série de u_Σ et $u_\Sigma(r)$, sont croissantes en module sur un voisinage de 0, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indice j ; les techniques à employer pour la démonstration sont exactement celles de [18]. Pour tout polynôme P , on a donc $|P(\lambda_j)k_j^1(0)| \leq |P(\lambda_j)k_j^1(r)|$, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indice j , indépendant de P , et il en est de même avec $|P(\lambda_j)k_j^2(0)|$ etc.

On en déduit que les coefficients de u_Σ décroissent plus rapidement que tout polynôme, ce qui démontre que la série en question définit bien une section C^∞ de $S^2\Sigma$. \square

Cette proposition permet de démontrer immédiatement le théorème suivant :

Théorème 6.3. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont strictement inférieurs à π . Soit $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_p)$ une variation donnée du p -uplet des angles coniques, et soit $h_{\dot{\alpha}}$ la déformation Einstein infinitésimale normalisée correspondante. Alors la déformation infinitésimale h_Σ de la métrique du lieu singulier, induite par $h_{\dot{\alpha}}$, est C^∞ .*

Démonstration. La déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot{\alpha}}$, telle qu'on l'a construite au théorème 5.6, est de la forme $h_1 - \delta^*\eta - h$. Le tenseur h_1 est asymptotique à une déformation conforme de la métrique du cône ; c'est lui qui réalise la variation des angles coniques au premier ordre, mais il ne contribue pas à la déformation induite h_Σ .

L'autre terme $h + \delta^*\eta$ vérifie, par construction, $P(h + \delta^*\eta) = 0$ au voisinage du lieu singulier. Donc d'après la proposition 6.2 précédente, il induit une déformation C^∞ de la métrique du lieu singulier, dont la partie provenant de h est a priori non triviale. \square

Les déformations Einstein infinitésimales sont donc C^∞ sur le lieu singulier. Notons néanmoins qu'à cause du terme h_1 , de la forme $(1 + \ln(r))(dr^2 + \text{sh}(r)^2 d\theta^2) + O(r^2 \ln(r))$, certaines composantes divergent près du lieu singulier. Mais cela est en partie dû au fait que la déformation est normalisée : on peut trouver des déformations non normalisées, dans la même classe, qui reste bornées près de Σ (il suffit de supprimer le terme en $\delta^*(\chi(r)e^r)$ qui apparaît dans la construction). Notons aussi que, comme on pouvait s'y attendre, la déformation $h_{\dot{\alpha}}$ ne se contente pas de changer les angles coniques : le fait de rester Einstein impose aussi de modifier de façon non triviale la métrique du lieu singulier.

Pour conclure cet article, je voudrais dire un mot des possibilités d'intégration des déformations Einstein infinitésimales modifiant les angles coniques. Le fait que, en un sens, l'espace tangent à une cône-variété hyperbolique parmi les structures de cônes-variétés Einstein est aussi simple, paramétré par les variations du p -uplet des angles coniques, est encourageant, ainsi que le comportement régulier des déformations infinitésimales. Un autre point positif est donné dans [18] (théorème 3.2.4) : l'opérateur Einstein linéarisé pour les déformations normalisées, $P = \nabla^* \nabla - 2\hat{R}$, est un isomorphisme de $L^{2,2}(S^2 M)$ dans $L^2(S^2 M)$ si tous les angles coniques sont inférieurs à $2\pi/3$. Tous ces résultats vont dans le sens d'un théorème d'inversion locale.

A cela s'oppose deux difficultés. Premièrement, il y a de bonnes raisons de penser que le cadre des espaces de Sobolev (qui est celui de cet article) n'est pas le plus approprié pour travailler avec des déformations qui ne sont plus infinitésimales. Les espaces de Hölder sont mieux adaptés à ce genre de problèmes, mais les estimées nécessaires y sont plus difficiles à établir. Deuxièmement, les espaces fonctionnels considérés (que ce soit de Hölder ou de Sobolev) dépendent de la valeur des angles coniques ; travailler avec des angles variables implique donc de travailler avec des espaces fonctionnels variables. Ces deux points contribuent à rendre le problème d'analyse géométrique plus compliqué, mais c'est justement cela qui le rend plus intéressant.

Références

- [1] M. Anderson. Dehn filling and Einstein metrics in higher dimensions. arXiv :math.DG/0303260, 2003.
- [2] A. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] G. Besson and M. Bordoni. On the spectrum of Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 9(1) :335–340, 1990.
- [4] O. Biquard. Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques. *Astérisque*, 265 :vi+109, 2000.
- [5] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Uniformization of small 3-orbifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(1) :57–62, 2001.
- [6] J. P. Bourguignon and L. Bérard Bergery. Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Illinois J. Math.*, 26 :181–200, 1982.
- [7] J. Brock and K. Bromberg. On the density of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 192(1) :33–93, 2004.
- [8] E. Calabi. On compact riemannian manifolds with constant curvature, I. *Amer. Math. Soc. Proc. Sympos. Pure Math.*, 3 :155–180, 1961.
- [9] J. Cheeger. On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. In *Geometry of the Laplace operator*, volume 36 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 91–146. Amer.Math.Soc., 1980.
- [10] D. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Diff. Geom.*, 18 :157–162, 1983.
- [11] M. Gaffney. The heat equation method of Milgram and Rosenbloom for open Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 60 :458–466, 1954.
- [12] H. Garland. A rigidity theorem for discrete subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129 :1–25, 1967.
- [13] C. Hodgson and S. Kerckhoff. Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery. *J. Diff. Geom.*, 48 :1–59, 1998.

- [14] C. Hodgson and S. Kerckhoff. Harmonic deformations of hyperbolic 3-manifolds. In *Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001)*, volume 299 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 41–73. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [15] N. Koiso. A decomposition of the space of Riemannian metrics on a manifold. *Osaka J. Math.*, 16 :423–429, 1979.
- [16] S. Kojima. Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds. *J. Differential Geom.*, 49(3) :469–516, 1998.
- [17] R. Mazzeo. Elliptic theory of differential edge operators I. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 16(10) :1615–1664, 1991.
- [18] G. Montcouquiol. *Déformations de métriques Einstein sur des variétés à singularités coniques*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005. Disponible sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011474>.
- [19] G. Mostow. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Publ. IHES*, 34 :53–104, 1968.
- [20] B. Nagy and F. Riesz. *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Académie des sciences de Hongrie. Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [21] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. arXiv :math.DG/0211159, 2002.
- [22] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGrawHill Book Co., New York-Dusseldorf-Johannesburg, 1973.
- [23] W. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University, 1979.
- [24] W. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [25] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Robert E.Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1976.
- [26] A. Weil. On discrete subgroups of Lie groups. *Ann. of Math.*, 72 :369–384, 1960.
- [27] H. Weiß. *Local rigidity of 3-dimensional cone-manifolds*. PhD thesis, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 2002.